

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA**

GUIDO ROSSETTO MORAES

**SOLUÇÕES ALTERNATIVAS DAS EQUAÇÕES
ESTÁTICAS DA REDE ELÉTRICA CONSIDERANDO O
CONTROLE QV**

Florianópolis

2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Moraes, Guido

Soluções alternativas das equações estáticas da rede elétrica considerando o controle QV / Guido Moraes ; orientador, Roberto Salgado - Florianópolis, SC, 2015. 113 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Inclui referências

1. Engenharia Elétrica. 2. Controle QV. 3. Controle Secundário de Tensão. 4. Otimização Estática. I. Salgado, Roberto. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

GUIDO ROSSETTO MORAES

**SOLUÇÕES ALTERNATIVAS DAS EQUAÇÕES
ESTÁTICAS DA REDE ELÉTRICA CONSIDERANDO O
CONTROLE QV**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Elétrica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Florianópolis, 4 de Dezembro 2015.

Prof. Carlos Galup Montoro, Ph.D.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D.
Universidade Federal de Santa Catarina
Orientador

Prof. Diego Issicaba, Ph.D.
Universidade Tecnológica do Paraná

Prof^a. Katia Campos de Almeida, Ph.D.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Hans Helmut Zürn, Ph.D.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Miguel Moreto, Dr. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina

Dedico este trabalho à Roberto Salgado.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço o apoio de meus familiares. Especialmente Sérgio, Raffaella, Dirce e Stela.

Agradeço ao Professor Salgado pela orientação e pelo incentivo. Mais do que isso, pelos conselhos, conversas e por ter me inspirado a seguir para o programa de mestrado.

Também agradeço aos professores do LABSPOT, em especial aos professores Simões e Kátia, pelos ensinamentos e pelo convívio durante minha pós-graduação. Agradeço também ao Professor Diego, da UTFPR, pelas contribuições.

Aos amigos, cuja companhia deixaram o trabalho mais fácil. Entre eles os colegas de laboratório: Cézar, Bráulio, Rodolfo, Kauana, João, Malinwo, Edwin, Fran, Bruno e Juninho. Também agradeço outros colegas que contribuíram para meu trabalho: Rodolfo Bialecki, Henrique, Mauricio, Rafael Costa, Wellington, Ciro e Humberto.

Às vezes é um erro subir, mas é sempre um erro nunca tentar. Se você não subir, não vai cair. A verdade é essa, mas será tão ruim assim fracassar, tão duro cair? Às vezes, você desperta . . . outras, sim, você morre. Mas há uma terceira alternativa. Você voa.
Neil Gaiman.

RESUMO

SOLUÇÕES ALTERNATIVAS DAS EQUAÇÕES ESTÁTICAS DA REDE ELÉTRICA CONSIDERANDO O CONTROLE QV

Esta dissertação apresenta um estudo sobre o impacto do Controle QV na solução das equações da rede elétrica em regime permanente. Três modelos analíticos são analisados. No primeiro, o conjunto de variáveis do problema de fluxo de potência convencional é estendido pela geração de potência reativa. Isto resulta num sistema linear subdeterminado a ser resolvido a cada iteração do método de Newton. As características da solução geral deste sistema linear permitem conduzir a solução do fluxo de potência para um ponto onde é possível melhorar um índice de desempenho relacionado à malha QV, selecionado adequadamente. O segundo modelo considera o Controle Secundário de Tensão (CST) no conjunto de equações do fluxo de potência convencional. Observa-se que esta estratégia permite obter soluções com melhor distribuição de potência reativa gerada, a despeito das dificuldades resultantes da imposição das equações de CST. O terceiro modelo analítico inclui as equações de CST como restrições em problemas de Fluxo de Potência Ótimo. Como objetivo, avaliou-se a minimização dos desvios quadráticos da magnitude de tensão de um valor pré-especificado e o carregamento máximo da rede. A versão não linear Primal-Dual do método de pontos interiores é usada para obter a solução destes problemas. Neste caso, a consideração de vários tipos de restrições de desigualdade resulta em soluções de maior aplicabilidade, sob o ponto de vista prático. Resultados numéricos obtidos utilizando sistemas de diferentes portes são usados para ilustrar o uso dos modelos analíticos apresentados.

Palavras-chave: Controle QV, Controle Secundário de Tensão, máximo carregamento, coordenadas retangulares, estratégias baseadas em otimização estática.

ABSTRACT

ALTERNATIVE SOLUTIONS TO THE POWER GRID STATIC EQUATIONS CONSIDERING QV CONTROL

This dissertation presents a study on the impact of QV Control in the steady state solution of the network equations. Three analytical models are analyzed. At the first model, the set of variables of the conventional power flow problem is extended by the reactive power generation. This results in a underdetermined linear system to be solved at each iteration of Newton's method. The characteristics of the general solution of this system allow to modify the power flow solution such as to improve performance indexes related to QV control. The second analytical model considers the Secondary Voltage Control (SVC) in the set of conventional power flow equations. It is observed that this strategy allows to obtain solutions with better distribution of reactive power generation, regarding the difficulties of the imposition of the SVC equations. The third analytical model includes the SVC equations as constraints in Optimal Power Flow problems. The minimization of the quadratic deviation of voltage magnitude from a specific point and the maximization of the loadability conditions was studied. The non-linear version of the Primal-Dual interior point method was used to obtain solutions to these problems. In this case, the consideration of different inequality constraints provides more practical solutions. Numerical results obtained with systems of different sizes were used to illustrate the analytical models proposed.

Keywords: QV Control, Secondary Voltage Control, maximum loadability, rectangular coordinates, strategies based on static optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Representação de linha de transmissão.....	25
Figura 2.2	Diagrama fasorial	26
Figura 5.1	Máximo desbalanço durante as iterações - IEEE300 barras.....	67
Figura 5.2	Máximo desbalanço durante as iterações - 959 barras..	68
Figura 5.3	Máximo desbalanço durante as iterações do método FPE - 959 barras.....	69
Figura 5.4	Processo iterativo - 959 barras.....	70
Figura 5.5	Desbalanços a cada iteração. - IEEE118 barras	71
Figura 5.6	Índice de performance durante as iterações. - 959 barras	72
Figura 5.7	Magnitude de tensão nas barras PQ e PQV - IEEE118 barras.....	73
Figura 5.8	Magnitude de tensão nas barras PQ da área 1 - IEEE118 barras.....	74
Figura 5.9	Magnitude de tensão nas barras PQ da área 1 após acréscimo - IEEE118 barras.....	75
Figura 5.10	Desbalanços a cada iteração. - 959 barras.....	80
Figura C.1	Solução de mínima norma Euclideana - interpretação geométrica.....	111

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Principais características dos sistemas teste.....	66
Tabela 5.2	IEEE-300 barras: Resumo das soluções de fluxo de potência.....	72
Tabela 5.3	IEEE-118 barras: Tensões nas barras P.....	76
Tabela 5.4	IEEE-300 barras: Resumo das soluções de fluxo de potência.....	77
Tabela 5.5	Figuras de mérito do processo iterativo - sistema de 959 barras.....	79
Tabela 5.6	Desempenho dos métodos para o sistema de 959 barras	80
Tabela 5.7	Resumo das soluções para o sistema de 39 barras.....	81
Tabela 5.8	Porcentagem de potência ativa gerada em cada área - 39 barras.....	81
Tabela 5.9	Resumo das soluções com acréscimo de carga - 39 barras	82
Tabela 5.10	Porcentagem de potência reativa gerada em cada área - 39 barras.....	82
Tabela 5.11	Porcentagem de potência ativa gerada em cada área - 39 barras.....	83
Tabela 5.12	Modificação das tensões nas barras PQV para o <i>caso d</i> - 39 barras.....	84
Tabela 5.13	Porcentagem de potência ativa gerada em cada área - 39 barras.....	84
Tabela 5.14	Resumo dos resultados do sistema de 959 barras.....	84
Tabela 5.15	Máximo carregamento para os sist. de 39 e 959 barras	85
Tabela 5.16	Geração de potência reativa por área sob máximo carregamento - Sistema de 39 barras.....	86
Tabela 5.17	Geração de potência reativa por barra sob máximo carregamento - Sistema de 39 barras.....	86

SUMÁRIO

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	19
1 Introdução	21
1.1 Objetivos	22
1.2 Resumo do trabalho proposto	22
1.3 Estrutura da dissertação	23
2 Controle QV	25
2.1 Introdução	25
2.2 Acoplamento QV	25
2.3 Dispositivos de controle	26
2.4 Tipos de controle	27
2.5 Métodos de análise estática	29
2.6 Conclusão	33
3 Controle Secundário de Tensão	35
3.1 Introdução	35
3.2 Revisão Bibliográfica	35
3.3 Fluxo de Potência com Controle Secundário de Tensão	39
3.4 Fluxo de Potência Ótimo com Controle Secundário de Tensão	40
3.5 Conclusão	42
4 Modelo Analítico	43
4.1 Introdução	43
4.2 Fluxo de potência convencional	43
4.3 Extensão do fluxo de potência convencional	46
4.4 Inclusão do Controle Secundário de Tensão	50
4.5 Fluxo de potência ótimo com CST	55
4.5.1 Minimização do desvio quadrático da magnitude de tensão nodal	56
4.5.2 Máximo carregamento	60
4.6 Conclusão	64
5 Resultados Numéricos	65
5.1 Aspectos computacionais	65

5.2	Sistemas teste	65
5.3	Fluxo de Potência estendido	66
5.3.1	Processo computacional	66
5.3.2	Análise das Soluções	70
5.3.3	Análise com variação do carregamento	73
5.3.4	Análise da seleção das barras de regulação	75
5.3.5	Análise da seleção de barras piloto	77
5.4	Fluxo de Potência Ótimo com restrições de Controle Secun- dário de Tensão	78
5.4.1	Processo computacional	78
5.4.2	Análise das Soluções	79
5.4.3	Resultados de máximo carregamento	84
5.5	Conclusões	87
6	Conclusão	89
6.1	Fluxo de Potência Estendido	90
6.2	Fluxo de Potência Estendido com Controle Secundário de Tensão	90
6.3	Fluxo de Potência Ótimo com Controle Secundário de Tensão	90
6.4	Sugestões para trabalhos futuros	91
	REFERÊNCIAS	93
	APÊNDICE A – Método Primal-Dual de Pontos Interiores	99
	APÊNDICE B – Programação Quadrática via KNITRO	107
	APÊNDICE C – Exemplo de aplicação de mínima norma Euclideana	111

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SIN *Sistema Interligado Nacional*

SEP *Sistemas Elétricos de Potência*

ONS *Operador Nacional do Sistema Elétrico*

IEEE *Institute of Electrical and Electronics Engineers*

FP Fluxo de Potência

FPO Fluxo de Potência Ótimo

FPE Fluxo de Potência Estendido

N-R Newton-Raphson

RC Região de Confiança

KKT Karush Kuhn Tucker

PDPI Primal-Dual de Pontos Interiores

PQS Programação Quadrática Sequencial

CA Conjunto Ativo

CST Controle Secundário de Tensão

PQS-CA Programação Quadrática Sequencial com Conjunto Ativo

1 INTRODUÇÃO

As flutuações na magnitude da tensão nas barras, resultantes das variações da carga e de eventuais contingências, tornam essencial o uso de uma estratégia de controle de potência reativa-magnitude da tensão (QV) durante a operação diária do sistema. Os principais objetivos desta estratégia são o controle da produção e do consumo de potência reativa, a manutenção dos níveis de magnitude de tensão nas barras satisfazendo limites pré-especificados e a redução das perdas de potência ativa nas linhas de transmissão [1].

Em termos analíticos, o controle QV tem sido visto como um problema não linear, multi-objetivo, de dimensão elevada, com níveis distintos de hierarquia. A natureza complexa deste problema mostra a necessidade de procedimentos de monitoração mais sofisticados do que aqueles utilizados no caso do controle de potência ativa-frequência [2]. Visando melhorar a segurança do sistema elétrico e/ou reduzir o custo de geração de potência ativa (através do ajuste da magnitude da tensão para a redução das perdas), estratégias para o controle QV foram propostas na Espanha, França e Itália no final dos anos 70 [3].

A coordenação deste controle é organizada em três níveis hierárquicos: Controle Primário de Tensão (CPT), Controle Secundário de Tensão (CST) e Controle Terciário de Tensão (CTT), [4–6]. Esta divisão é feita considerando o tempo e a variação da carga, consequentemente o tipo e a urgência de ação de controle. De acordo com a hierarquia do controle QV, o nível secundário recebe informações do nível terciário, de forma a fornecer indicações de ações de controle para o nível primário.

Este trabalho enfoca a análise em regime permanente envolvendo o CST, utilizando as informações regionais para modificar adequadamente os controladores, com o objetivo de ajustar a magnitude da tensão das barras piloto nos valores de referência. O sistema de potência é dividido em áreas, para cada uma das quais um conjunto de unidades geradoras (denominados *geradores de regulação*) é selecionado para monitorar o nível da magnitude da tensão de uma determinada barra pertencente à área (denominada *barra piloto*). O CST coordena automaticamente os recursos de potência reativa, de forma a estabelecer um nível de magnitude de tensão satisfatório, com uma adequada margem de potência reativa dos dispositivos de controle QV. Isto permite manter um nível de tensão adequado no sistema de transmissão quando a carga varia (na escala de tempo horária) e/ou após eventuais

modificações na topologia do sistema.

1.1 Objetivos

Esta dissertação apresenta um estudo das equações estáticas da rede elétrica considerando controle QV. Isto é, pretende-se observar soluções alternativas do problema de fluxo de potência que priorizem índices como geração e distribuição de potência reativa e mínimo desvio de tensão. Além disso, a teoria, modelagem e aplicação do CST são apresentadas.

Através de testes com sistemas de diversos portes, espera-se identificar as vantagens das modelagens propostas, bem como enumerar as dificuldades encontradas. Espera-se também motivar a continuidade deste estudo através da apresentação de resultados promissores e sugestões para trabalhos futuros.

1.2 Resumo do trabalho proposto

Neste trabalho, apresenta-se um estudo da utilização do CST na operação de *Sistemas Elétricos de Potência* (SEP) em regime permanente. As seguintes modelagens analíticas são apresentadas:

1. fluxo de potência convencional com extensão do conjunto de variáveis. Nesta formulação, a inclusão da geração de potência reativa como variável resulta na solução de um sistema linear subdeterminado em cada passo do processo iterativo. Isto permite ajustar as componentes da solução, de forma a se obter distribuição da geração de potência reativa mais conveniente;
2. fluxo de potência convencional com inclusão de restrições do CST. Neste caso, além do acréscimo no número de variáveis, o sistema de equações não lineares do problema de fluxo de potência convencional é estendido para considerar as restrições do CST. Novamente, a solução dessas é baseada num sistema linear aumentado, com o uso adicional das informações de segunda ordem fornecidas pelas equações do fluxo de potência;
3. fluxo de potência ótimo com inclusão de restrições do CST. Esta formulação visa a solução das equações do fluxo de potência com o mínimo desvio quadrático de um nível de tensão pré-especificado,

considerando as restrições do CST. A versão não linear do método de pontos interiores é utilizada para obter esta solução.

4. identificação dos níveis de carregamento críticos induzidos pelas restrições do CST. Este modelo é baseado na parametrização das equações do fluxo de potência estendido para considerar o CST. Um esquema de predição-correção, semelhante ao do método da continuação, é combinado com um algoritmo de otimização estática para determinar uma sequência de soluções do fluxo de potência estendido. Cada uma dessas soluções corresponde a um nível de carregamento, aqui referido como crítico, no qual a restrição de magnitude de tensão de uma das barras piloto ou o limite de capacidade de alguma barra reguladora impede o aumento adicional do nível de carga.

As equações do fluxo de potência são expressas em coordenadas retangulares, tanto pela sua simplicidade como pela precisão das soluções preditas. Resultados com sistemas de diferentes portes ilustram as principais características das metodologias propostas.

1.3 Estrutura da dissertação

O texto desta dissertação se apresenta da seguinte maneira: no Capítulo 2, é introduzido o controle de potência reativa - tensão, chamado controle QV; o Capítulo 3 aborda especificamente o CST; no Capítulo 4, é apresentada a modelagem analítica e os métodos numéricos utilizados; no Capítulo 5, são mostrados resultados numéricos que ilustram a aplicação das diferentes metodologias propostas neste trabalho; o Capítulo 6 apresenta as principais conclusões da dissertação.

2 CONTROLE QV

2.1 Introdução

Visando simplificar a tomada de decisão envolvendo os aspectos econômicos das soluções de segurança durante a operação dos SEP, até um passado recente era frequente o estudo separado dos problemas envolvendo as malhas potência reativa-tensão e potência ativa-abertura angular. No entanto, apesar desta separação ser útil do ponto de vista de implementação prática de algoritmos e entendimento de fenômenos fundamentais, a condição operativa sob carregamentos pesados e limites atingidos acaba complicando a proposição, tornando o problema mais complexo. Desta maneira, um grande esforço para entender os fenômenos envolvendo potência reativa e tensão tem sido feito [7].

Este capítulo pretende explanar os conceitos básicos do acoplamento QV, apresentar a teoria envolvida em controle de potência reativa - tensão, os dispositivos utilizados, os tipos e estratégias.

2.2 Acoplamento QV

A Figura 2.1, [7], representa uma linha de transmissão aérea, onde V_1 e V_2 são as tensões dos dois terminais, P_1 , P_2 , Q_1 e Q_2 são as potências ativas e reativas nestes terminais, R é a resistência série e X a reatância série da linha; e I é a corrente que flui na linha, no sentido do terminal 1 para 2.

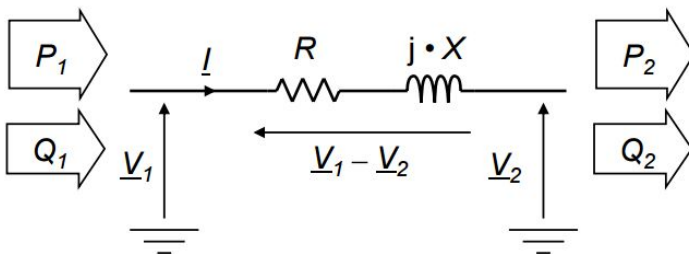


Figura 2.1 – Representação de linha de transmissão

A representação fasorial de cada elemento pode ser vista na Figura 2.2, [7].

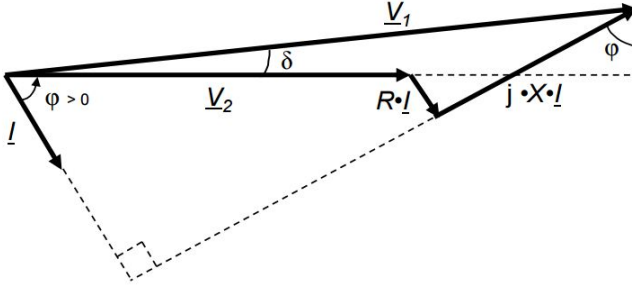


Figura 2.2 – Diagrama fasorial

A partir da figura deduz-se por relações trigonométricas, [7], [8] a seguinte expressão:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\frac{1}{2}R \times I^2 + \frac{1}{2}X \times XI^2 + RP_2 + XQ_2}{V^2} \quad (2.1)$$

onde $\Delta V = V_1 - V_2$ e $V = \frac{V_1}{V_2}$.

Para sistemas de transmissão de alta tensão, pode-se aproximar $\frac{P_2}{Q_2} \approx 3$ (considerando $\cos\varphi = 0.95$) e $\frac{X}{R} \approx 10$, [7], [9], [10]. Com isto, a expressão (2.1) torna-se

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{XQ_2}{V^2} \quad (2.2)$$

Observa-se por (2.2) que controlando o valor de Q_2 , a tensão V^2 pode também ser controlada, ou seja, o controle de tensão nas barras pode ser feito garantindo-se o fornecimento da potência reativa demandada e o fluxo pelas linhas de transmissão.

2.3 Dispositivos de controle

Os dispositivos utilizados no controle QV são de atuação local, regulando geradores, transformadores com tap variável, reatores e capacitores shunt.

Quanto aos geradores, o controle é feito de forma contínua atra-

vés da corrente de excitação. Os equipamentos responsáveis por este controle são chamados de Reguladores Automáticos de Tensão (AVR), e determinam uma operação na condição de sub-excitação ou sobre-excitação, o que implica absorção ou fornecimento de potência reativa.

Os transformadores, por sua vez, sempre absorvem potência reativa, mas permitem o controle do tap (no caso dos Transformadores com Comutação sob Carga) para variar a tensão de saída deste equipamento.

Observa-se que reatores, capacitores e taps de transformadores são dispositivos de controle discreto, que podem ser acionados de acordo com os comandos advindos de circuitos de automação ou do operador do sistema. Em conjunto com estes equipamentos são utilizados os chamados dispositivos FACTS (Sistemas Flexíveis de Transmissão AC), capazes de realizar ajustes contínuos. Os FACTS mais utilizados são os Reguladores de Potência Reativa (RPC) e os Compensadores Estáticos de Potência Reativa (SVC). Os RPCs conectam ou desconectam automaticamente conjuntos de capacitores através de medições de fase entre tensões e correntes na rede. Os SVCs são constituídos de tiristores e filtros, o que possibilita fornecer uma saída contínua indutiva ou capacitiva ao sistema, [1].

Observa-se que todos os equipamentos são de controle específico e local, devendo ser coordenados para atingir um objetivo geral para o sistema.

2.4 Tipos de controle

A estratégia ideal de controle em um SEP define uma condição ótima e garante a operação nesta condição utilizando os equipamentos disponíveis, através de medições, análises e tomadas de decisão. Para isso, é necessário conhecer a topologia atualizada e o carregamento da rede em tempo real. Desta maneira, uma única unidade de controle e coordenação centralizada baseada em informações e estimações de parâmetros e medidas poderia detectar alterações no sistema e propor decisões operativas.

No entanto, os SEP são reconhecidamente de grande porte, distribuídos em áreas distintas, cuja análise requer modelagens analíticas com equações não lineares. Os dispositivos de controle estão distribuídos na rede elétrica, e seu custo torna economicamente desvantajoso disponibilizá-los redundantemente por todo o sistema [11]. Todas essas condições implicam um aumento de tempo para medição, cálculos e

transmissão de dados, o que dificulta o controle centralizado. Porém, uma coordenação centralizada das ações de controle é necessária para garantir o alcance dos objetivos vinculados à operação ótima da rede elétrica. Por esta razão, foram desenvolvidas as estratégias de coordenação centralizada e de controle descentralizado do sistema, [12], [13]. Por controle descentralizado entende-se que apenas informações locais são utilizadas nas tomadas de decisão. E para que a coordenação centralizada tenha tempo o suficiente para analisar os dados disponíveis e funcionar eficientemente, utiliza-se uma estrutura vertical hierárquica de prioridades de ação, de acordo com a magnitude da variação da carga e o tempo com que ela varia. De uma forma geral, a coordenação deste controle é organizada nos três níveis hierárquicos [4–6] descritos a seguir.

1. Controle Primário de Tensão (CPT): compensa as variações rápidas e aleatórias da magnitude da tensão, mantendo estas variáveis tão próximas quanto possível dos valores de referência. Apenas informações locais são usadas para definir as ações de controle, cuja constante de tempo é da faixa de poucos segundos. Os centros de controle operam prioritariamente ajustando a tensão de seus geradores através de Reguladores Automáticos de Tensão (AVRs). Outros dispositivos como Compensadores Estáticos de Potência Reativa (SVCs) e reguladores automáticos de taps de transformadores também são utilizados nesta etapa. Todos os equipamentos são considerados dinâmicos.
2. Controle Secundário de Tensão (CST): regula as variações lentas e de significante magnitude de tensão (resultantes da variação de carga, por exemplo). As ações determinadas por este tipo de controle são baseadas nos valores de referência da magnitude da tensão em barras de carga específicas. Este nível consiste de reguladores regionais de magnitude de tensão e reguladores de potência reativa. A constante de tempo dessas ações de controle é da ordem de poucos minutos. Nesta etapa, utilizam-se também dispositivos estáticos.
3. Controle Terciário de Tensão (CTT): determina as ações de controle para ajustar a magnitude da tensão das barras piloto nos valores ótimos, visando geralmente aspectos econômicos e de segurança. As informações do sistema completo, incluindo todos os níveis hierárquicos, são utilizadas em aplicativos computacionais como o Fluxo de Potência Ótimo (FPO). Neste tipo de

controle predomina a ideia da monitoração centralizada, o que resulta numa constante de tempo variando de vários minutos a algumas horas, maior do que aquela do CST. O nível terciário de regulação de tensão recebe periodicamente (em geral a cada 15 minutos) informações sobre o estado do sistema. Essas informações são usadas em conjunto com um aplicativo computacional (em geral o Fluxo de Potência Ótimo) para calcular a magnitude da tensão de referência (*set points*) das barras piloto, com base na previsão de carga de curto prazo. Os valores da tensão de referência são transmitidos ao nível secundário.

Em resumo, os Reguladores Automáticos de Tensão são usados exclusivamente em geradores individuais no CPT, os efeitos desses reguladores dentro de uma região são coordenados pelo CST e os efeitos de ambos o CPT e o CST são coordenados pelo CTT [2]. De acordo com a hierarquia do controle QV, o nível secundário recebe informações do nível terciário, de forma a fornecer indicações de ações de controle para o nível primário.

É reconhecido que o esquema de controle QV baseado em malha fechada fornece melhor distribuição da geração de potência reativa, possibilitando uma recondução mais rápida da rede elétrica ao nível de tensão normal após uma contingência, [4], [14]. Adicionalmente, a manutenção de uma margem de potência reativa em cada dispositivo de controle QV previne os problemas de instabilidade de tensão e aumenta o nível de segurança do sistema de potência.

Algumas dificuldades do controle hierárquico QV são as seguintes: 1) o acoplamento entre as diversas barras do sistema, o que dificulta a divisão do mesmo em áreas distintas; 2) a seleção das barras piloto e a especificação da magnitude da tensão nestas barras [5]; 3) a modificação contínua do controle dos geradores e da magnitude da tensão nas barras piloto para acompanhar as variações da demanda e as eventuais contingências [15]; e 4) a não consideração do efeito de outros dispositivos de controle QV, tais como os bancos de capacitores e reatores, em tempo real.

2.5 Métodos de análise estática

Devido à organização hierárquica, a dinâmica lenta da carga nos níveis secundário e terciário permite a utilização de métodos estáticos para análises de controle QV. As metodologias de análise se baseiam na solução das equações que modelam a rede elétrica em regime perma-

nente, e os dispositivos computacionais utilizam em geral uma formulação analítica simples, que requer tempo e memória de processamento moderada. As principais abordagens encontradas na literatura são:

1. Fluxo de Potência

As abordagens iniciais para controle QV se baseavam nas soluções do método Desacoplado Rápido, e na realimentação de informações advindas de ajustes de controle, [2]. No entanto, considerava-se como PQ as barras de tensão controlada, enquanto que as barras que necessitavam de injeção de potência reativa eram chamadas de PV. Nestas barras PV a tensão era determinada a cada iteração através de relações de sensibilidade, [16], [17]. No entanto, esta metodologia tomava muito tempo de operação, [2].

As abordagens mais recentes consideram uma extensão do problema de fluxo de potência convencional. Em [2] é proposto um modelo que considera a inclusão de dois novos tipos de barras, as barras piloto (PQV) e barras de regulação (barras P). A tensão nas barras PQV é controlada pela injeção de potência reativa proveniente das barras de regulação próximas. De maneira geral, o controle QV garante a tensão das barras piloto e de carga pré-especificando a distribuição de potência reativa nas barras reguladoras.

As equações de desbalanço de potência, para esta abordagem são expressas como

$$\begin{aligned} P_{g_i} - P_{d_i}^0 - P_i &= 0 \\ Q_{g_i} - Q_{d_i}^0 - Q_i &= 0 \\ Q_{g_i}^r - Q_{d_i}^0 - Q_i &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde o superescrito 0 indica variável pré-especificada e o superescrito r indica as variáveis das barras de regulação, respectivamente. P_i e Q_i representam as injeções de potência na barra i ; P_{g_i} e Q_{g_i} representam as potências geradas; P_{d_i} e Q_{d_i} representam as potências demandadas na barra i .

Mais informações sobre esta modelagem são apresentadas no Capítulo 4.

2. Fluxo de Potência Ótimo

Nesta abordagem considera-se as equações do fluxo de potência como restrições de igualdade. Com isso, é possível garantir

o controle QV além de satisfazer condições de segurança. Em [6] diversas funções objetivo com aplicações relacionadas ao controle QV são propostas, como minimização da potência reativa gerada/absorvida pelos geradores e determinação do máximo carregamento.

O problema de controle QV pode ser modelado matematicamente como um problema de otimização não linear e restrito. De maneira geral:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} && f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\
 &\text{sujeito a} && \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \\
 & && \mathbf{x}^m \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^M \\
 & && \mathbf{u}^m \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^M \\
 & && \mathbf{h}^m \leq \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{h}^M
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde \mathbf{x} e \mathbf{u} são respectivamente os vetores das variáveis de estado (tensão e fase nas barras) e das variáveis de controle (tensão nos geradores, tap dos transformadores e potência reativa nos compensadores). $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ é a função objetivo. $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ é um vetor coluna de funções composto pelas equações da rede expressas em (2.3). $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ representa o vetor coluna de restrições funcionais que dependem das variáveis do problema, como por exemplo fluxo reativo nas linhas de transmissão.

3. Análise de sensibilidade

A interdependência entre as variáveis dos SEPs é aproveitada nesta abordagem, sendo quantitativamente estimada e utilizada para análises de planejamento de operação. Neste tipo de abordagem, as relações de sensibilidade entre a injeção de potência reativa e tensões nas barras são obtidas através da linearização (via expansão em série de Taylor) da expressão do balanço de potência reativa na rede (2.5). Outras variáveis de controle podem

ser utilizadas. Sejam as equações que modelam a rede dadas por

$$\begin{aligned} P_{g_i} - P_{d_i} - e_i \sum_{j=1}^n (G_{ij}e_j - B_{ij}f_j) + f_i \sum_{j=1}^n (G_{ij}f_j + B_{ij}e_j) &= 0 \\ Q_{g_i} - Q_{d_i} - f_i \sum_{j=1}^n (G_{ij}e_j - B_{ij}f_j) - e_i \sum_{j=1}^n (G_{ij}f_j + B_{ij}e_j) &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde P_{g_i} e Q_{g_i} representam a geração de potência ativa e reativa da barra i , respectivamente; P_{d_i} e Q_{d_i} representam as potências ativa e reativa da carga na barra i ; e_i e f_i são as componentes real e imaginária da tensão complexa, isto é, $V_i = \sqrt{e_i^2 + f_i^2}$; e G_{ij} e B_{ij} são termos da matriz admitância de barra, os quais dependem apenas dos parâmetros do sistema de transmissão.

De maneira resumida, (2.5) pode ser representada como

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

onde \mathbf{g} é o conjunto das equações (2.5), \mathbf{x} são as variáveis dependentes ou variáveis de estado e \mathbf{u} são as variáveis de controle definidas anteriormente. As relações entre as variáveis de controle e dependentes pode ser determinada expandindo-se as equações não lineares da rede (2.6) em série de Taylor, na vizinhança da solução inicial $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$ e na direção $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{u})$, até o termo de primeira ordem. Isto fornece

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) + \mathbf{G}_x(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)\Delta \mathbf{x} + \mathbf{G}_u(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)\Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

tal que \mathbf{G}_x e \mathbf{G}_u são as derivadas de (2.6) em relação a \mathbf{x} e \mathbf{u} respectivamente. Fazendo-se $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = \mathbf{0}$ graças a (2.6), obtém-se

$$\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{G}_x(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^{-1}\mathbf{G}_u(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)\Delta \mathbf{u} \quad (2.8)$$

tal que a relação de sensibilidade entre $\Delta \mathbf{x}$ e $\Delta \mathbf{u}$ pode ser definida como

$$\mathbf{S}_{xu} = -\mathbf{G}_x(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^{-1}\mathbf{G}_u(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \quad (2.9)$$

A partir de (2.9) pode-se investigar a influência da tensão nas barras de geração e da variação de taps de transformadores, por exemplo, na injeção de potência reativa nas barras. Este tipo de

estimação pode ser interessante para realizar ajustes convenientes de variáveis de forma se obter uma solução viável, quando outros métodos não encontram soluções com respeito aos limites de operação. Em [18], esta abordagem é utilizada para determinar o controle necessário para manter o limiar de estabilidade. Os dispositivos de controle considerados são transformadores de tap variável, capacitores estáticos, SVCs e AVR.

4. Algoritmos de inteligência artificial

Aproveitando análises de resultados obtidos via problemas de fluxo de potência e relações de sensibilidade, [1] e [19] propõem sistemas especialistas capazes de selecionar e coordenar as ações de controle. A estratégia apresentada em [1] é baseada em duas etapas: inicialmente o sistema identifica as áreas mais críticas do ponto de vista de tensão analisando soluções do problema de Fluxo de Potência. Em seguida, o sistema especialista utiliza regras empíricas e heurísticas pré-determinadas aliadas a informações de sensibilidade dos parâmetros controláveis, para determinar a ação mais eficiente. No entanto a abordagem só envolve o controle das violações de tensão, não tratando diretamente a natureza das relações com a potência reativa do sistema.

2.6 Conclusão

Ao longo do tempo, o interesse pelo controle QV cresceu na operação de SEP. Desenvolveu-se a estratégia de coordenação centralizada e controle descentralizado do sistema, tal que uma divisão hierárquica é proposta, a qual envolve os níveis de controle primário, secundário e terciário de tensão. Esta divisão possibilita o uso de métodos analíticos em regime permanente, baseados nas equações de balanço de potência da rede elétrica.

3 CONTROLE SECUNDÁRIO DE TENSÃO

3.1 Introdução

O (CST) é a etapa do controle hierárquico responsável por regular as variações lentas e de significativa magnitude de tensão, visando garantir uma margem de potência reativa bem distribuída que evite um colapso de tensão na ocorrência de contingências. De acordo com a teoria de controle clássico, para que todo o sistema elétrico seja *controlável* do ponto de vista de tensão é necessário que o número de barras de carga do sistema seja menor que o número de barras de geração [20]. Porém, o número de barras de carga é muito maior que o número de barras de geração em qualquer SEP, trazendo a necessidade de dividir o sistema em áreas e controlar barras específicas.

Para divisão do sistema em áreas, aproveita-se as características de cada barra quanto a tensão e potência reativa, agrupando-as tal que se supõe que há um desacoplamento QV entre as áreas. Isto é, espera-se poder realizar ações de controle locais em cada área sem afetar demais as outras. É selecionada uma barra para ser a representante do perfil de tensão de cada área, denominada *barra piloto*. Para controlar a tensão desta barra, selecionam-se diversas *barras reguladoras*, as quais são utilizadas também para estabelecer um nível de geração de potência reativa adequado para o sistema.

O esquema de controle é dividido em duas malhas. A malha de tensão é responsável por manter a tensão da barra piloto em seu valor de referência, fornecido pela etapa de Controle Terciário de Tensão. Comparam-se os valores atual e de referência, tal que a diferença é enviada como um sinal de erro à ser tratado por um controlador proporcional-integral. A malha de Potência Reativa visa determinar o nível de potência reativa gerada em cada barra de regulação. Este nível é determinado proporcionalmente à capacidade de geração de cada barra de uma mesma área, coordenando as reservas de potência reativa locais, [21]. O controle, por ser implementado por áreas, é chamado de descentralizado.

3.2 Revisão Bibliográfica

A estratégia de controle hierárquico QV, tem sido implantada em vários países (Itália, França, Bélgica, Espanha, Romênia, etc.) [1].

Baseados nos mesmos conceitos iniciais de controlar a tensão nas barras piloto e definir uma margem adequada de potência reativa gerada em cada área, os esquemas implementados em cada país foram sendo adaptados de acordo com as particularidades de seus sistemas elétricos, [22].

França foi considerada o primeiro país a implementar o controle hierárquico, em 1979 [21]. A estratégia utilizada sobrepunha a malha de controle de tensão e controle de potência reativa à uma malha de controle primário que envolvia reguladores automáticos de tensão. No entanto, os reguladores não eram especificamente instalados nas barras de regulação, realizando o controle de forma centralizada. Esta proposta obteve resultados satisfatórios durante anos, [22]. Com o crescimento do sistema elétrico francês, a rede foi se tornando acoplada demais do ponto de vista QV. Isto implicou em dificuldades para impor um mesmo nível de potência reativa em todas as barras reguladoras de cada área, e em controlar as tensões nas barras de piloto. Como solução, o sistema francês considera o controle de mais de uma barra piloto por área. Além disso, como análise estática do CST, o sistema francês se baseia em um problema de otimização em que a função objetivo considera tanto a tensão nas barras piloto como os níveis de potência reativa nas barras de regulação.

Diferentemente do esquema francês, o esquema italiano utiliza um dispositivo próprio instalado em cada barra reguladora. Adicionalmente, possuem unidades de controle específicas conhecidas como RVR (do inglês *Regional Voltage Regulator*) para cada área, onde implementam a malha de controle de potência reativa. Estas unidades também são responsáveis por controlar bancos de capacitores, reatores shunt, transformadores de tap variável entre outros dispositivos utilizados para evitar a saturação dos geradores de cada área. Do ponto de vista de análise estática, funções objetivo para minimização de perdas, desvio de tensão e máximo carregamento são utilizadas para determinar os pontos de operação ótimos do sistema [6]. Este sistema possui um grau de complexidade menor que o francês, sendo também referência para outros países da Europa e do Mundo [22].

Desde a década de 90, com o controle hierárquico já implementado, diversos estudos vêm sendo propostos para analisar o desempenho do CST, bem como buscar alternativas para as dificuldades encontradas. A referência [4] apresenta uma análise de segurança da operação sob controle descentralizado e sob controle coordenado (na época estudados de forma isolada), comparativamente a sistemas com apenas CPT. A metodologia de estudo apresentada se baseia em três etapas:

seleção, análise e controle corretivo de contingências, tal que foi concluído que os sistemas sob CST apresentam melhor performance em regime permanente do ponto de vista de restabelecer a estabilidade de tensão em relação aos sistemas considerando apenas CPT.

Em [14], o comportamento do sistema sob instabilidade de tensão é analisado, provando os benefícios do CST em comparação com sistemas que possuem apenas CPT. Além disso, [14] propõe uma estratégia de controle emergencial, mais eficiente que o controle baseado em barras piloto em condições de instabilidade de tensão iminente. A melhoria trazida pelo CST quanto à performance da operação sob instabilidade de tensão também é apresentada em [23].

Dois aspectos são fundamentais para a eficiência do controle secundário de tensão. O primeiro é a seleção das barras piloto. Essas barras estão associadas a zonas eletricamente compactas, e a sua magnitude de tensão é suposta ser a melhor representação do perfil de tensão da área [4]. Os procedimentos comumente encontrados na literatura baseiam-se em regras definidas a partir de observações da operação do sistema elétrico em simulações computacionais. Além disso, relações de sensibilidade fundamentadas na linearização das equações do SEP são frequentemente utilizadas, a despeito da imprecisão deste modelo quando a rede elétrica opera próximo ao seu limite de capacidade de transmissão. Uma vez selecionadas, as barras-piloto são mantidas nesta função para qualquer condição de operação. A despeito de eventuais modificações, a imposição da magnitude da tensão de referência neste conjunto fixo de barras pode dificultar o processo de solução das equações do fluxo de potência. O segundo aspecto diz respeito à seleção das barras de regulação, cujas principais funções são controlar a magnitude da tensão das barras piloto e manter uma margem adequada de potência reativa. Isto é realizado através de um esquema de controle, tal que todos os geradores de uma área operam com a mesma proporção do seu limite máximo de geração de potência reativa. As dificuldades desta escolha estão relacionadas à disponibilidade, localização e capacidade destes geradores.

O problema de seleção das barras piloto, bem como a forma de tratar a tensão especificada nessas barras é abordado em [5]. Os autores comprovam que, dependendo do carregamento do sistema, diferentes conjuntos de barras são mais adequadas para serem utilizadas como piloto, resultando em diferentes perfis de tensão para os testes realizados.

Em [24] é apresentada uma comparação de desempenho e custo entre a utilização do CST e o uso de dispositivos de compensação shunt.

Os resultados obtidos mostram que o CST é uma alternativa competitiva do ponto de vista de estabilidade de tensão e dados os casos apresentados, financeiramente mais vantajosa.

Em [25] aborda-se o uso de informação de primeira e segunda ordem para determinar indicativos de sensibilidade que sejam capazes de revelar a necessidade de ações corretivas ou preventivas na presença de CST. Além disso, tais parâmetros permitem determinar a distância do ponto de operação do sistema em relação ao colapso de tensão. Em [3] este estudo é considerado na determinação do máximo valor singular da matriz inversa das equações de fluxo de potência com CST, interpretado como um parâmetro de indicação de estabilidade.

A otimização do fluxo de potência com CST é abordada em [26], onde diversas funções objetivo são testadas de forma separada e testadas considerando otimização multi-objetivo. Análises do ponto de vista do Operador do Sistema Italiano são apresentadas, todas levando em conta aspectos financeiros e condições de segurança. A programação multiobjetivo considerando o CST é abordada em [27], onde são apresentadas análises na ocorrência de contingências e onde é debatida a performance de acordo com critérios pré-determinados de estabilidade de tensão. As margens de estabilidade na presença de CST também é abordada em [28].

Já [29] apresenta estudos preliminares considerando a utilização de CST no Brasil, mais especificamente na região sudeste, com enfoque no Rio de Janeiro. O sistema teste real compreende 387 barras, 678 linhas de transmissão, 30 geradores e 5 unidades reguladoras. Os autores analisam a resposta dinâmica do sistema para variações de carga, ocorrência de contingência e aumento da margem de carregamento permitida, com resultados promissores. Apresentam também testes selecionando diferentes barras piloto na região, comprovando a influência desta escolha nos demais parâmetros avaliados. A estratégia utilizada de controle hierárquico se baseia no desvio de magnitude de tensão das barras piloto de um valor especificado, tal que este erro é processado e enviado para AVR's. Os reguladores atuam para corrigir o desvio. Este esquema se baseia apenas nas margens de variação dos AVR's, não abordando diretamente o controle de potência reativa gerada. É mais simples do ponto de vista prático mas menos preciso do que a estratégia de CST baseada no alinhamento dos níveis de potência reativa nas barras reguladoras, [15].

3.3 Fluxo de Potência com Controle Secundário de Tensão

Para incluir as ações de CST na operação do SEP em regime permanente, é necessário aumentar o número de equações do fluxo de potência para incluir as restrições relacionadas a manutenção da tensão de referência nas barras de carga (uma em cada área) pré-selecionadas e aos níveis de potência reativa das unidades geradoras (individualmente) e das áreas (o conjunto de dispositivos de controle QV). Para isto, além dos tipos de barras convencionais ($V\delta$, PV e PQ), é necessária a definição de dois tipos adicionais descritos a seguir.

- *Barra PQV*: representa analiticamente as barras piloto, ou seja, as injeções líquidas de potência ativa e reativa e a magnitude da tensão são especificadas a priori neste tipo de barra. O ângulo da tensão é calculado na solução do problema de fluxo de potência. Uma barra piloto deve ser especificada em cada área e portanto o número de barras PQV é igual ao número de áreas.
- *Barra P*: modela as barras de regulação, onde é suposto haver um dispositivo de controle de potência reativa (gerador ou compensador síncrono, SVC, etc). Apenas a injeção de potência ativa é especificada neste tipo de barra. O ângulo e a magnitude da tensão são determinados na solução do problema de fluxo de potência. O número de barras P é igual ao número barras selecionadas previamente para controlar a magnitude da tensão das barras piloto.

As restrições relativas à margem de potência reativa dos dispositivos de controle QV é representada pelas chamadas *equações de alinhamento*. Essas restrições impõem a condição de que a produção de potência reativa de cada unidade geradora da área com relação ao seu limite de capacidade deve ser igual à produção total de potência reativa da área com relação à correspondente capacidade total da mesma. Analiticamente isto é expresso pela equação,

$$\frac{Q_{g_i}}{Q_{g_i}^M} = \frac{\sum_{j \in \Omega_k} Q_{g_j}}{\sum_{j \in \Omega_k} Q_{g_j}^M} \quad \text{para qualquer } i \in \Omega_k \quad (3.1)$$

onde Ω_k representa o conjunto de barras de geração da área k , $\sum_{j \in \Omega_k} Q_{g_j}$ é a potência reativa total gerada na área k , e o superscrito M representa

o limite máximo. O número de equações de alinhamento é igual ao número de barras reguladoras.

A inclusão das equações que representam o CST na formulação do problema de fluxo de potência resulta em um sistema de equações não lineares composto de: 1) a equação de balanço de potência ativa de todas as barras, exceto a barra $V\delta$; 2) a equação de balanço de potência reativa das barras PQ e PQV; 3) a equação quadrática da magnitude da tensão das barras PV e PQV; 4) as equações que representam as restrições de alinhamento na geração de potência reativa das barras P. Em termos analíticos,

$$\begin{aligned}
 P_{g_i} - P_{d_i}^0 - P_i(e, f) &= 0 \\
 Q_{g_i} - Q_{d_i}^0 - Q_i(e, f) &= 0 \\
 V_i^2 - (e_i^2 + f_i^2) &= 0 \\
 \frac{Q_{g_i}}{Q_{g_i}^M} - \frac{\sum_{j \in \Omega_k} Q_{g_j}}{\sum_{j \in \Omega_k} Q_{g_j}^M} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde todas as variáveis foram definidas anteriormente.

O nível de potência reativa de cada área k é dado por,

$$N_{\Omega_k} = \frac{\sum_{j \in \Omega_k} Q_{g_j}}{\sum_{j \in \Omega_k} Q_{g_j}^M}$$

3.4 Fluxo de Potência Ótimo com Controle Secundário de Tensão

Em problemas de otimização, as equações de alinhamento passam a ser utilizadas como restrições de igualdade juntamente com as equações de balanço de potência. De maneira geral, o problema de

otimização é dado por

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} && f_o(e, f) \\
 &\text{sujeito a} && \Delta P_i = P_{gi} - P_{di}^0 - P_i(e, f) \\
 & && \Delta Q_i = Q_{gi} - Q_{di}^0 - Q_i(e, f) \\
 & && \Delta Q_{ri} = Q_{gri} - Q_{di}^0 - Q_i(e, f) \\
 & && \Delta V_i = V_i^{r^2} - (e_i^2 + f_i^2) \\
 & && P_{gi}^m \leq P_{gi} \leq P_{gi}^M \\
 & && Q_{gi}^m \leq Q_{gi} \leq Q_{gi}^M \\
 & && V_i^m \leq V_i \leq V_i^M
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde as equações apresentadas em (3.2) se tornam restrições de igualdade, e $f_o(e, f)$ representa a função objetivo do problema. Usualmente, os índices mais associados ao problema de CST são, [30]:

- Mínimo desvio de tensão de um valor especificado: Função objetivo escolhida para penalizar desvios de tensão em relação a tensão nominal especificada nas barras. Matematicamente expressa por $f_o = \sum (V_i - V_i^{esp})^2$, onde V_i representa a tensão na barra i e V_i^{esp} representa a tensão nominal especificada nesta mesma barra.
- Minimização da potência reativa gerada/absorvida pelos geradores: Tem o objetivo de determinar o ponto de operação ótimo em que o sistema tem uma margem de regulação suficiente, garantindo uma reserva de potência preventiva para possíveis alterações do sistema. A função objetivo é descrita como $f_o = \sum Q_{g,i}^2$, onde $Q_{g,i}$ é a potência reativa gerada pelo i -ésimo gerador.
- Máximo carregamento: A variação da carga é parametrizada em função de ρ , fator que simboliza a distância entre o ponto de operação da rede e o ponto de colapso de tensão. A demanda de potência nas barras é expressa por:

$$\begin{aligned}
 P_d &= P_d^0 + \rho \Delta P_d \\
 Q_d &= Q_d^0 + \rho \Delta Q_d
 \end{aligned}$$

tal que P_d^0 e Q_d^0 representam a potência ativa e reativa demandadas no caso base. ΔP_d e ΔQ_d representam a variação destas

demandas. Dessa forma, o problema de otimização se torna maximizar a função objetivo $f_o = \rho$.

Quanto as restrições de desigualdade, geralmente se utiliza as expressões $V_{i,min} \leq V_i \leq V_{i,max}$ e $Qg_{i,min} \leq Qg_i \leq Qg_{i,max}$ para limitar respectivamente a tensão e a potência reativa gerada nas barras.

3.5 Conclusão

O Controle Secundário de Tensão é a etapa do controle hierárquico que lida com as variações de tensão provenientes de variações lentas da carga. Nesta etapa busca-se estabelecer um nível de geração de potência reativa nas barras reguladoras de acordo com as tensões nas barras piloto de cada área, escolhidas para representar o perfil de tensão das mesmas. O objetivo é definir uma melhor distribuição de potência reativa de acordo com as tensões em cada área para garantir melhores condições de operação na ocorrência de carregamento pesado ou de contingências.

Diversos estudos na área vêm sendo feitos, apontando as vantagens do CST em condições de operação adversas. Os métodos de análise em regime permanente se baseiam nas equações estáticas da rede e na consideração das equações de alinhamento. A escolha das barras piloto e barras de regulação são apontadas como algumas das dificuldades mais comuns para o bom desempenho do método.

4 MODELO ANALÍTICO

4.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentadas as modelagens analíticas que representam os problemas estudados neste trabalho. Inicialmente, analisa-se a inclusão da geração de potência reativa como variável do problema de fluxo de potência convencional. Isto implica a solução de um sistema linear subdeterminado em cada passo do processo iterativo do método de Newton. Além disso, é possível ajustar as componentes da solução, de forma a se obter uma distribuição da geração de potência reativa mais conveniente. Esta estratégia é referida no texto como Fluxo de Potência Estendido (FPE). A seguir, mostra-se a formulação analítica do problema de fluxo de potência com restrições de CST. Neste caso, além do acréscimo no número de variáveis, o sistema de equações não lineares do problema de fluxo de potência convencional é estendido para considerar as barras piloto e as restrições de alinhamento. Novamente, a solução dessas equações é baseada num sistema linear aumentado, com o uso adicional das informações de segunda ordem fornecidas pelas equações do fluxo de potência. Posteriormente, apresenta-se a modelagem do problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) com inclusão de restrições do CST. Duas formulações são mostradas. A primeira visa a minimização do desvio quadrático de magnitude da tensão de um nível pré-especificado e a segunda tem como objetivo determinar o nível de carregamento máximo. Em ambas são consideradas as restrições operacionais e de CST. A versão não linear do método de pontos interiores é utilizada para obter esta solução. No presente estudo, é suposto que as barras piloto e os geradores de regulação são previamente selecionados.

4.2 Fluxo de potência convencional

Denotando n_b o número total de barras do SEP e considerando coordenadas retangulares para modelar as tensões complexas nas barras, o conjunto de $n_{eq} = 2n_b - 2$ equações do fluxo de potência é expresso

por,

$$\begin{aligned}
 P_{g_i} - P_{d_i} - e_i \sum_{j=1}^n (G_{ij}e_j - B_{ij}f_j) + f_i \sum_{j=1}^n (G_{ij}f_j + B_{ij}e_j) &= \Delta P_i \\
 Q_{g_i} - Q_{d_i} - f_i \sum_{j=1}^n (G_{ij}e_j - B_{ij}f_j) - e_i \sum_{j=1}^n (G_{ij}f_j + B_{ij}e_j) &= \Delta Q_i \\
 V_i^{r^2} - (e_i^2 + f_i^2) &= \Delta V_i
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde P_{g_i} e Q_{g_i} representam a geração de potência ativa e reativa da barra i , respectivamente; P_{d_i} e Q_{d_i} representam as potências ativa e reativa da carga na barra i ; V_i^r é a magnitude da tensão na barra i , expressa em função das componentes real e imaginária da tensão complexa, isto é, $V_i^r = \sqrt{e_i^2 + f_i^2}$; e G_{ij} e B_{ij} são termos da matriz admitância de barra, os quais dependem apenas dos parâmetros do sistema de transmissão.

Para um nível de carga especificado, representado pelas variáveis $P_{d_i}^0$ e $Q_{d_i}^0$, a modelagem convencional do problema de fluxo de potência requer a pré-especificação de algumas variáveis, tais como P_{g_i} , Q_{g_i} e V_i . Para qualquer solução convergente, a magnitude de ΔP_i , ΔQ_i e ΔV_i (denominados *desbalanços*) deve satisfazer uma tolerância pré-especificada (geralmente 10^{-3} por unidade) na solução final. Há um total de $(n_b - 1)$ equações relacionadas aos desbalanços de potência ativa. As equações envolvendo ΔV_i correspondem a um conjunto de barras com dispositivos de controle (geradores, por exemplo) da malha QV. O número de equações dos desbalanços ΔQ_i e ΔV_i é $(n_b - 1)$. As expressões de desbalanço são,

$$\begin{aligned}
 P_{g_i} - P_{d_i}^0 - P_i(e, f) &= \Delta P_i \\
 Q_{g_i} - Q_{d_i}^0 - Q_i(e, f) &= \Delta Q_i \\
 V_i^{r^2} - (e_i^2 + f_i^2) &= \Delta V_i
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde os superscritos 0 e r indicam variáveis pré-especificadas e de referência, respectivamente; e $P_i(e, f)$ e $Q_i(e, f)$ representam as injeções de potência ativa e reativa, respectivamente, expressas em função das componentes real e imaginária da tensão complexa. Tradicionalmente, essas componentes formam um conjunto de $n_{vr} = 2n_b - 2$ variáveis do problema de fluxo de potência.

As Eqs. (4.1) e (4.2) podem ser reescritas na forma compacta

como,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_s - \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

onde $\mathbf{g}(\cdot)$ é um vetor coluna de ordem n_{eq} , cujos componentes são as funções algébricas que representam os desbalanços de potência e de magnitude quadrática da tensão, e \mathbf{x} representa o vetor de variáveis do fluxo de potência; \mathbf{y}_s e $\mathbf{g}_0(\mathbf{x})$ são vetores de ordem $((2n_b - 1) \times 1)$, com componentes $(P_{g_i} - P_{d_i}^0), (Q_{g_i} - Q_{d_i}^0)$ e $V_i^{r^2}$, e $P_i(e, f), Q_i(e, f)$ e $(e_i^2 + f_i^2)$, respectivamente.

O sistema linear a ser resolvido a cada iteração do método de Newton é dado por:

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \\ \Delta \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 \\ \mathbf{J}_5 & \mathbf{J}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{e} \\ \Delta \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3, \mathbf{J}_4, \mathbf{J}_5$ e \mathbf{J}_6 são matrizes de primeira derivada das Eqs. (4.2) com relação às variáveis (e, f) ; $\Delta \mathbf{P}$, $\Delta \mathbf{Q}$ e $\Delta \mathbf{V}$ são vetores com componentes $\Delta P_i, \Delta Q_i$ e ΔV_i , respectivamente; e $\Delta \mathbf{e}$ e $\Delta \mathbf{f}$ são vetores com componentes Δe_i and Δf_i , respectivamente.

As matrizes Jacobianas são calculadas de acordo com:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= \text{diag}(\mathbf{e})\mathbf{G} + \text{diag}(\mathbf{f})\mathbf{B} + \text{diag}(\mathbf{G}\mathbf{e} - \mathbf{B}\mathbf{f}) \\ \mathbf{J}_2 &= \text{diag}(\mathbf{f})\mathbf{G} - \text{diag}(\mathbf{e})\mathbf{B} + \text{diag}(\mathbf{G}\mathbf{f} + \mathbf{B}\mathbf{e}) \\ \mathbf{J}_3 &= \text{diag}(\mathbf{f})\mathbf{G} - \text{diag}(\mathbf{e})\mathbf{B} - \text{diag}(\mathbf{G}\mathbf{f} + \mathbf{B}\mathbf{e}) \\ \mathbf{J}_4 &= -\text{diag}(\mathbf{e})\mathbf{G} - \text{diag}(\mathbf{f})\mathbf{B} + \text{diag}(\mathbf{G}\mathbf{e} - \mathbf{B}\mathbf{f}) \\ \mathbf{J}_5 &= \text{diag}(2\mathbf{e}) \\ \mathbf{J}_6 &= \text{diag}(2\mathbf{f}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

tal que a operação $\text{diag}(\cdot)$ quando aplicada em um vetor \mathbf{x} de ordem $n_x \times 1$, retorna uma matriz quadrada $n_x \times n_x$ cuja diagonal é composta pelos termos x_i e os demais termos são nulos. Esta mesma operação, quando aplicada para uma matriz \mathbf{A} de ordem $n_x \times n_x$, retorna o vetor \mathbf{a} cujos elementos a_i são os termos da diagonal principal de \mathbf{A} . Os vetores \mathbf{e} e \mathbf{f} são compostos pelas componentes retangulares e_i e f_i da tensão em cada barra i . \mathbf{G} e \mathbf{B} são as matrizes de condutância e susceptância shunt, respectivamente.

4.3 Extensão do fluxo de potência convencional

Nesta seção, analisa-se a possibilidade de aumentar o número de variáveis do problema de fluxo de potência, selecionando algumas unidades geradoras para exercer a função de barras de regulação QV. Isto é fisicamente possível porque a geração de potência reativa pode ser controlada pelo operador do sistema. Portanto, é suposto que a geração de potência reativa das n_{gr} barras pré-selecionadas é expressa analiticamente por,

$$Q_{g_i}(Q_{r_i}) = Q_{g_i}^r + Q_{r_i} \quad (4.6)$$

onde $Q_{g_i}^r$ é o valor de referência (pré-especificado) da geração de potência reativa, e Q_{r_i} é a i -ésima variável auxiliar, que representa a variação de potência reativa gerada. Visando manter o número de equações do modelo de fluxo de potência inalterado, a magnitude quadrática da tensão de cada barra reguladora Eq. (4.2) é substituída pela correspondente equação de balanço de potência reativa. O novo conjunto de equações do fluxo de potência se torna,

$$\begin{aligned} P_{g_i} - P_{d_i}^0 - P_i(e, f) &= \Delta P_i \\ Q_{g_i} - Q_{d_i}^0 - Q_i(e, f) &= \Delta Q_i \\ Q_{g_i}^r + Q_{r_i} - Q_{d_i}^0 - Q_i(e, f) &= \Delta Q_{r_i} \\ V_i^{ref^2} - (e_i^2 + f_i^2) &= \Delta V_i \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde o número de equações do problema de fluxo de potência se mantém em $2 \times n_b - 2$ e o número de variáveis aumenta para $n_{vr} = 2n_b - 2 + n_{gr}$. O sistema de equações do problema de fluxo de potência estendido é portanto,

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

onde \mathbf{y} é um vetor com componentes e, f e Q_{r_i} .

A aplicação do método de Newton para resolver a Eq. (4.8) requer a cada iteração a solução do sistema linear,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{J}_5 & \mathbf{J}_6 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{e} \\ \Delta \mathbf{f} \\ \Delta \mathbf{Q}_{r_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \\ \Delta \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

onde \mathbf{I}_n é uma matriz esparsa com n_{gr} colunas, resultante da primeira derivada da segunda e terceira Eqs. (4.7) com relação às variáveis Q_{r_i} , cujos elementos não nulos são unitários; e as outras variáveis foram

previamente definidas. As matrizes $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3, \mathbf{J}_4, \mathbf{J}_5, \mathbf{J}_6$ são calculados da mesma maneira como foi apresentada na seção 4.2.

A Eq. (4.9) é re-escrita na forma compacta como,

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (4.10)$$

onde todos os termos são facilmente identificados.

O sistema linear da Eq. (4.10) tem $n_{eq} = 2n_b - 2$ equações e $n_{vr} = 2n_b - 2 + n_{gr}$ variáveis, o que caracteriza um sistema linear sub-determinado com infinitas soluções. A solução geral deste sistema é expressa pela soma de duas componentes, a solução de Mínima Norma Euclideana e a solução de Espaço Nulo, [31]. A primeira possui características desejáveis para fins práticos em termos de desvio reduzido de um dado ponto de operação. A segunda pode ser monitorada para controlar algumas variáveis do sistema de potência, visando a melhoria de certos índices de desempenho do sistema elétrico. Assim, se o posto da matriz \mathbf{A} é n_{eq} , a dimensão da matriz de espaço nulo das linhas de \mathbf{A} é $n_{vr} \times (n_{vr} - n_{eq})$, e a solução geral da Eq. (4.10) pode ser expressa num subespaço reduzido de dimensão $n_{vr} \times (n_{vr} - n_{eq})$. No presente estudo, a estratégia para resolver esta equação consiste em primeiro determinar a solução de mínima norma da Eq. (4.10), e subsequentemente buscar uma solução particular, de acordo com um critério pré-estabelecido, de forma semelhante àquela apresentada em [32]. A solução geral da Eq. (4.10) é dada por [31, 33]

$$\Delta\mathbf{y} = \Delta\mathbf{y}_0 + \alpha\mathbf{T}_0\mathbf{z} \quad (4.11)$$

onde $\Delta\mathbf{y}_0$ é a solução de mínima norma Euclideana, \mathbf{T}_0 é uma matriz de dimensão $n_{vr} \times (n_{vr} - n_{eq})$, de espaço nulo das linhas de $\mathbf{A}(\mathbf{y}_e)$; isto é, $\mathbf{A}(\mathbf{y}_e)\mathbf{T}_0 = \mathbf{\Theta}$ ($\mathbf{\Theta}$ é uma matriz nula de ordem $(n_{vr} - n_{eq}) \times n_{eq}$), \mathbf{z} é um vetor coluna arbitrário de ordem $(n_{vr} - n_{eq})$ e α é um fator incluído na equação para controlar o quanto a solução de espaço nulo influencia na solução geral.

A solução de mínima norma da Eq. (4.10) pode ser obtida resolvendo-se o seguinte problema de otimização,

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \frac{1}{2} \Delta\mathbf{y}_0^t \Delta\mathbf{y}_0 \\ &\text{sujeito a } \mathbf{A}\Delta\mathbf{y}_0 = \mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.12)$$

isto é,

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{y}_0 &= \mathbf{A}^t [\mathbf{A}\mathbf{A}^t]^{-1} \mathbf{b} \\ \lambda_0 &= [\mathbf{A}\mathbf{A}^t]^{-1} \mathbf{b}\end{aligned}\tag{4.13}$$

onde λ_0 é o vetor dos multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade da Eq. (4.12). Um exemplo numérico demonstrando a ilustração geométrica da mínima norma Euclideana pode ser encontrado no Apêndice C.

Para determinar a matriz de espaço nulo \mathbf{T}_0 , considere a matriz ortogonal \mathbf{T} , de ordem $n_{vr} \times n_{vr}$, tal que,

$$\mathbf{T} \times \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{\Theta} \end{bmatrix}\tag{4.14}$$

onde \mathbf{R} é uma matriz triangular superior de ordem $n_{eq} \times n_{eq}$ e $\mathbf{\Theta}$ é a matriz nula previamente definida. Suponha que a matriz \mathbf{T} é particionada como,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}$$

onde \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 são submatrizes de ordem $n_{eq} \times n_{vr}$ e $(n_{vr} - n_{eq}) \times n_{vr}$, respectivamente. Então,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \mathbf{A}^t \\ \mathbf{T}_2 \mathbf{A}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{\Theta} \end{bmatrix}\tag{4.15}$$

Desde que $\mathbf{T}^t \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{T}^t = \mathbf{I}$, então a Eq. (4.13) pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{y}_0 &= \mathbf{T}^t \mathbf{T} \mathbf{A}^t [\mathbf{A} \mathbf{T}^t \mathbf{T} \mathbf{A}^t]^{-1} \mathbf{b} \\ \lambda_0 &= [\mathbf{A} \mathbf{T}^t \mathbf{T} \mathbf{A}^t]^{-1} \mathbf{b}\end{aligned}\tag{4.16}$$

o que resulta em,

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{y}_0 &= \mathbf{T}_1^t \mathbf{R}^{-t} \mathbf{b} \\ \lambda_0 &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}^{-t} \mathbf{b}\end{aligned}\tag{4.17}$$

Além disso, da Eq. (4.15), a sub-matriz \mathbf{T}_2^t pode ser selecionada como a matriz de espaço nulo \mathbf{T}_0 da solução geral. Assim,

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{T}_1^t \mathbf{R}^{-t} \mathbf{b} + \mathbf{T}_2^t \mathbf{z}\tag{4.18}$$

Diversos critérios podem ser considerados para determinar a solução baseada na matriz de espaço nulo, definida pelas variáveis \mathbf{z} da Eq. (4.18). Particularmente, se a geração de potência reativa varia de acordo com a Eq. (4.6), o cálculo do vetor \mathbf{z} que minimiza o desvio quadrático da geração de potência reativa das barras de regulação de um valor de referência pode ser selecionado como um índice de desempenho. Neste caso, é necessário resolver um problema de otimização de pequeno porte expresso por,

$$\text{Minimizar } \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_{gr}^0 + \Delta\mathbf{s} - \mathbf{Q}_{gr}^r)^t \mathbf{W}_q (\mathbf{Q}_{gr}^0 + \Delta\mathbf{s} - \mathbf{Q}_{gr}^r) \quad (4.19)$$

onde \mathbf{Q}_{gr}^0 é o valor inicial da geração de potência reativa, \mathbf{Q}_{gr}^r é um vetor coluna de ordem n_{gr} , cujos componentes são os valores de referência da geração de potência reativa nas barras de regulação; e \mathbf{W}_q é uma matriz de ponderação, cujos termos podem ser unitários, ou baseados na capacidade do dispositivo de regulação, etc.

Da Eq. (4.11),

$$\Delta\mathbf{s} = \Delta\mathbf{y}_{0_s} + \mathbf{T}_{0_r}\mathbf{z} \quad (4.20)$$

onde $\Delta\mathbf{y}_{0_s}$ e \mathbf{T}_{0_r} são as partes dos vetores correspondentes a solução de mínima norma $\Delta\mathbf{y}_0$ e a matriz de espaço nulo \mathbf{T}_0 , das barras reguladoras; tal que o problema da Eq. (4.19) é re-escrito como,

$$\text{Minimizar } \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_{gr}^0 + \Delta\mathbf{y}_{0_s} + \mathbf{T}_{0_r}\mathbf{z} - \mathbf{Q}_{gr}^r)^t \mathbf{W}_q (\mathbf{Q}_{gr}^0 + \Delta\mathbf{y}_{0_s} + \mathbf{T}_{0_r}\mathbf{z} - \mathbf{Q}_{gr}^r) \quad (4.21)$$

cuja solução é obtida resolvendo-se o sistema linear,

$$(\mathbf{T}_{0_r}^t \mathbf{W}_q \mathbf{T}_{0_r})\mathbf{z} = -\mathbf{T}_{0_r}^t \mathbf{W}_q (\mathbf{Q}_{gr}^0 + \Delta\mathbf{y}_{0_s} - \mathbf{Q}_{gr}^{ref}) \quad (4.22)$$

onde a matriz de coeficientes e o vetor do lado direito possuem dimensões $n_{gr} \times n_{gr}$ e $n_{gr} \times 1$, respectivamente.

O processo iterativo necessário para realizar este tipo de controle intermediário é sumarizado na seguinte sequência de passos:

1. Estime valores iniciais para as componentes real e imaginária da tensão complexa nas barras e_i , f_i e para as componentes s_i (vetor \mathbf{y} da Eq. (4.8));
2. Calcule os desbalanços de potência ativa, reativa e magnitude quadrática da tensão $\Delta\mathbf{P}$, $\Delta\mathbf{Q}$, $\Delta\mathbf{V}$; (vetor \mathbf{b} do lado direito da Eq. (4.10));

3. Verifique a convergência do processo iterativo: se a magnitude do vetor \mathbf{b} é menor do que uma tolerância pré-especificada ϵ (geralmente 10^{-3}), a convergência foi alcançada; caso contrário, prosiga ao próximo passo;
4. Determine a matriz \mathbf{A} da Eq. (4.10) (a matriz de coeficientes da Eq. (4.9)), faça a fatoração QR da matriz \mathbf{A}^t , e determine a solução de mínima norma Euclideana, de acordo com a Eq. (4.17); resolva o problema de otimização da Eq. (4.19) para determinar a componente de espaço nulo da solução geral, a qual fornece a distribuição de potência reativa gerada com mínimo desvio quadrático do valor de referência;
5. Atualize as variáveis e_i , f_i e s_i , e retorne ao passo (2);

Este procedimento é uma combinação do método convencional de Newton-Raphson para resolver o problema de fluxo de potência com a solução geral de um sistema linear subdeterminado. Em adição à solução de mínima norma Euclideana, a solução de um problema de otimização de porte reduzido fornece a direção de busca da componente de espaço nulo. Isto resulta em maior flexibilidade para determinar soluções do fluxo de potência com melhoria simultânea em índices de desempenho adequadamente selecionados. É possível controlar a prioridade atribuída ao índice de desempenho ajustando convenientemente o valor de α na equação (4.11), o que permite obter soluções do fluxo de potência com uma melhor distribuição das margens de potência reativa entre os geradores.

4.4 Inclusão do Controle Secundário de Tensão

A metodologia utilizada para estender o fluxo de potência convencional foi então aplicada para o problema de CST, representado pelo conjunto de equações (3.2), apresentado inicialmente na seção 3.3 e abaixo novamente exposto:

$$\begin{aligned}
 P_{g_i} - P_{d_i}^0 - P_i(e, f) &= 0 && \text{barras P, PV, PQ e PQV} \\
 Q_{g_i} - Q_{d_i}^0 - Q_i(e, f) &= 0 && \text{barras PQ e PQV} \\
 V_i^{r^2} - (e_i^2 + f_i^2) &= 0 && \text{barras PV e PQV} \\
 \frac{Q_{g_i}}{Q_{g_i}^M} - \frac{\sum_{j \in \Omega_k} Q_{g_j}}{\sum_{j \in \Omega_k} Q_{g_j}^M} &= 0 && \text{barras P}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

onde todas as variáveis foram definidas anteriormente.

Suponha que n_{pq} é o número de barras PQ (excluindo-se as barras piloto), n_{pv} é o número de barras PV, n_{pi} é o número de barras piloto, n_{gr} é o número de barras reguladoras e n_b é o número total de barras do sistema. O número de equações a serem resolvidas e o número de variáveis a serem determinadas no problema de fluxo de potência estendido são respectivamente,

$$\begin{aligned} n_{eqs} &= n_b - 1 + n_{pq} + n_{pi} + n_{pv} + n_{pi} + n_{gr} = 2n_b - 2 + n_{pi} \\ n_{var} &= 2n_b - 2 \end{aligned}$$

onde o número de barras piloto é igual ao número de áreas. Observe que a diferença entre o número de equações resultante da inclusão das restrições de CST com relação ao modelo convencional do fluxo de potência é igual ao número de barras piloto (áreas), o qual geralmente é reduzido quando comparado ao número total de barras. Note que o sistema linear correspondente à solução da Eq. (3.2) pelo método de Newton é retangular, com o número de equações maior do que o número de incógnitas e com uma matriz Jacobiana de posto igual ou menor do que $2n_b - 2$. A solução deste sistema através do método de mínimos quadrados não é útil para a finalidade proposta, pois não satisfaz os balanços de potência de forma satisfatória. Neste trabalho, utilizou-se a estratégia de reescrever a Eq. (3.1) como,

$$Q_{g_i} = \frac{\sum_{(j \neq i) \in \Omega_k} Q_{g_j}}{\left(\frac{\sum_{j \in \Omega_k} Q_{g_j}^M}{Q_{g_i}^M} - 1 \right)} \quad (4.24)$$

e a potência reativa gerada na barra de regulação j expressa por,

$$Q_{g_j}(e, f) = Q_{d_j} + Q_j(e, f) \quad (4.25)$$

tal que a Eq. (4.24) pode ser re-escrita como,

$$Q_{g_i} = \frac{\sum_{(j \neq i) \in \Omega_k} (Q_{d_j} + Q_j(e, f))}{\left(\frac{\sum_{j \in \Omega_k} Q_{g_j}^M}{Q_{g_i}^M} - 1 \right)} \quad (4.26)$$

e a equação do desbalanço de potência reativa na barra de regulação i é expresso por,

$$\frac{\sum_{(j \neq i) \in \Omega_k} (Q_{d_j} + Q_j(e, f))}{\left(\frac{\sum_{j \in \Omega_k} Q_{g_j}^M}{Q_{g_i}^M} - 1 \right)} - Q_{d_i} - Q_i(e, f) = 0 \quad (4.27)$$

ou, na forma compacta,

$$Q_{g_{ri}} - Q_{d_i} - Q_i(e, f) = 0 \quad (4.28)$$

A Eq. (4.27) garante que as equações de balanço de potência reativa e de alinhamento são simultaneamente satisfeitas na solução da Eq. (4.23). Nota-se que a Eq. (4.27) expressa o balanço de potência reativa da barra i em função das potências reativas geradas na área j .

Com esta modificação, o modelo analítico do problema de fluxo de potência com CST é dado por,

$$\begin{aligned} P_{g_i} - P_{d_i}^0 - P_i(e, f) &= 0 && \text{barras P, PV, PQ e PVQ} \\ Q_{g_i} - Q_{d_i}^0 - Q_i(e, f) &= 0 && \text{barras PQ, PQV} \\ Q_{g_{ri}} - Q_{d_i}^0 - Q_i(e, f) &= 0 && \text{barras P} \\ V_i^{r^2} - (e_i^2 + f_i^2) &= 0 && \text{barras PV e PQV} \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde $Q_{g_{ri}}$ é dada pela Eq. (4.27).

Com relação ao número de equações do fluxo de potência convencional, a inclusão das barras piloto resulta num acréscimo de n_{pi} equações, conforme indica a Eq. (4.29). Isto implica numa matriz Jacobiana retangular, com o número de linhas maior do que o número de colunas, quando se usa o método de Newton. Da mesma maneira que o modelo da seção anterior, a formulação analítica apresentada nesta seção requer um aumento no número de variáveis do fluxo de potência convencional. Seguindo o mesmo processo apresentado, o sistema linear resolvido a cada iteração do método de Newton-Raphson é dado por:

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \\ \Delta \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_3^* & \mathbf{J}_4^* & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{J}_5 & \mathbf{J}_6 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{e} \\ \Delta \mathbf{f} \\ \Delta \mathbf{Q}_{r_i} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

cujas componentes já foram previamente apresentadas, e as matrizes \mathbf{J}_3^*

e J_4^* são calculadas semelhantemente às matrizes J_3 e J_4 apresentadas na seção 4.2, diferindo nos termos relativos às equações (4.27). Ou seja,

- Se a barra i não é barra de regulação:

$$\mathbf{J}_3^*(i,j) = \mathbf{J}_3(i,j)$$

$$\mathbf{J}_4^*(i,j) = \mathbf{J}_4(i,j)$$

- Se a barra i é de regulação:

$$\mathbf{J}_3^*(i,i) = \mathbf{J}_3(i,j)$$

$$\mathbf{J}_3^*(i,j) = \frac{1}{\left(\frac{\sum_{(j \neq i) \in \Omega_k} Q_{g_j}^M}{Q_{g_i}^M} \right)} \mathbf{J}_3(i,j)$$

$$\mathbf{J}_4^*(i,i) = \mathbf{J}_4(i,j)$$

$$\mathbf{J}_4^*(i,j) = \frac{1}{\left(\frac{\sum_{(j \neq i) \in \Omega_k} Q_{g_j}^M}{Q_{g_i}^M} \right)} \mathbf{J}_4(i,j)$$

Da mesma forma que no problema de fluxo de potência convencional, a potência reativa das barras de geração está sujeita à condição

$$Q_{g_i}^m \leq Q_{g_i} \leq Q_{g_i}^M \quad (4.31)$$

tal que, durante as iterações do processo de solução do fluxo de potência estendido, o procedimento tradicional baseado na conversão de barras é utilizado para manipular estes limites. No presente caso, as barras dos tipos P e PV podem ser eventualmente convertidas em barras PQ. A conversão PV-PQ é aplicada em uma barra por vez, o que requer o intercâmbio entre as equações da magnitude quadrática da tensão e do balanço de potência reativa da barra PV cuja geração de potência reativa atingiu o limite. No caso das barras P, os limites de potência reativa gerada das unidades de controle de uma mesma área tendem a atingir os respectivos limites simultaneamente, por causa das restrições de alinhamento. Portanto, aplica-se a conversão P-PQ ao conjunto completo de barras P da área. Consequentemente, estes equipamentos deixam de exercer controle sobre a barra piloto, o que implica que a magnitude da tensão desta barra deixa de ser imposta, e a barra PQV é convertida em barra PQ.

A solução deste *problema de fluxo de potência estendido* é baseada na solução geral de um sistema linear subdeterminado, a qual é

composta pela solução de mínima norma Euclideana e pela solução de espaço nulo. No caso presente, a inclusão do CST na forma de restrições de alinhamento e de magnitude da tensão nas barras piloto reduzem praticamente por completo a possibilidade da otimização de índices de desempenho associados à distribuição de potência reativa. Como alternativa, a solução de espaço nulo pode ser calculada para acelerar o processo iterativo ou para melhorar índices de desempenho, associados à distribuição de potência ativa gerada ou à magnitude da tensão. No presente estudo, a disponibilidade dos termos de segunda ordem da expansão em série de Taylor das equações de fluxo de potência expressas em coordenadas retangulares é explorada. A base teórica desta estratégia, proposta inicialmente em [34], está apresentada abaixo.

O sistema de equações (3.2) pode ser representado na forma compacta como

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{r}_s - \mathbf{g}_0(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (4.32)$$

tal que \mathbf{r}_s é o vetor de variáveis pré-especificadas (injeções de potência, magnitude de tensão, etc), \mathbf{y} é o vetor das variáveis estendidas do problema de fluxo de potência e $\mathbf{g}_0(\mathbf{y})$ é o vetor das funções relacionadas às variáveis pré-especificadas, isto é, funções não-lineares que relacionam \mathbf{r}_s e \mathbf{y} .

O vetor $\mathbf{g}_0(\mathbf{y})$ pode ser expresso na forma quadrática como,

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \mathbf{Q}_0 \mathbf{y} \quad (4.33)$$

tal que \mathbf{Q}_0 é um arranjo tridimensional que depende dos parâmetros das linhas de transmissão.

O termo de segunda ordem da expansão em série de Taylor da Eq. (4.32), no ponto $\mathbf{y}^{(k)}$, na direção $\Delta \mathbf{y}$, é dado por

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k)} + \Delta \mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{y}^{(k)}) \Delta \mathbf{y} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{y}^t \mathbf{Q}_0 \Delta \mathbf{y} \quad (4.34)$$

e consequentemente

$$\frac{1}{2} \Delta \mathbf{y}^t \mathbf{Q}_0 \Delta \mathbf{y} = \mathbf{g}_0(\Delta \mathbf{y}) \quad (4.35)$$

A determinação exata do termo quadrático da Eq. (4.35) requer uma estimação precisa da variação incremental $\Delta \mathbf{y}$, disponível somente no final da iteração. No entanto, a variação incremental calculada em uma única iteração é predominantemente composta pela direção base-

ada no modelo linear do método de Newton-Raphson. Essa direção, aqui denotada por $\Delta \mathbf{y}_a$, pode ser utilizada para estimar o termo quadrático com precisão considerável, além de disponibilizar a direção $\Delta \mathbf{y}_b$ ao resolver o sistema linear.

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}^{(k)})\Delta \mathbf{y}_b = \mathbf{g}_0(\Delta \mathbf{y}_a) \quad (4.36)$$

Desta forma, duas soluções de mínima norma são calculadas, com as mesmas matrizes de coeficiente e diferentes vetores do lado direito, um deles baseado na informação de segunda ordem. Para essa proposta, o seguinte sistema sub-determinado tem que ser resolvido a cada iteração:

1. $\mathbf{J}(\mathbf{y}^{(k)})\Delta \mathbf{y}_a = -\mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k)})$
2. $\mathbf{J}(\mathbf{y}^{(k)})\Delta \mathbf{y}_b = -\mathbf{g}_0(\Delta \mathbf{y}_a)$

tal que o incremento ao final de cada iteração é $\Delta \mathbf{y} = \Delta \mathbf{y}_a + \Delta \mathbf{y}_b$.

Este procedimento foi satisfatoriamente aplicado para o problema convencional de fluxo de potência, reduzindo acentuadamente o número de iterações para convergência, [34].

4.5 Fluxo de potência ótimo com CST

O problema de fluxo de potência sujeito às restrições de CST, é tratado do ponto de vista de otimização com base nas seguintes suposições:

1. as variáveis de otimização são as componentes real e imaginária da tensão complexa nas barras e uma variável auxiliar z_j adicionada para objetivos de desempenho computacional;
2. a potência reativa gerada é calculada em função das variáveis de otimização;
3. a potência ativa gerada é suposta variar apenas na barra de folga;
4. as barras de regulação são selecionadas entre as barras de folga e PV da formulação do problema de fluxo de potência convencional;
5. visando melhor controle da magnitude da tensão nodal, as barras de geração não selecionadas para a regulação do CST são consideradas barras de controle de tensão; isto é, são tratadas de forma semelhante às barras PV do problema de fluxo de potência convencional;

4.5.1 Minimização do desvio quadrático da magnitude de tensão nodal

O problema de otimização que representa a minimização do desvio quadrático da magnitude da tensão com restrições de CST é dado por,

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (V_i - V_i^r)^t (V_i - V_i^r) \\
 &\text{sujeito a} \quad \Delta P_i = P_{g_i} - P_{d_i}^0 - P_i(e, f) = 0 \quad \text{barras P, PV, PQ e PQV} \\
 &\quad \Delta Q_i = Q_{g_i} - Q_{d_i}^0 - Q_i(e, f) = 0 \quad \text{barras PQ e PQV} \\
 &\quad \Delta Q_{r_i} = Q_{g_{r_i}} - Q_{d_i}^0 - Q_i(e, f) = 0 \quad \text{barras P} \\
 &\quad \Delta V_i = V_i^{r^2} - (e_i^2 + f_i^2) = 0 \quad \text{barras PV e PQV} \\
 &\quad Q_{g_i}^m \leq Q_{g_i} \leq Q_{g_i}^M \quad \text{barras PV e P} \\
 &\quad V_i^m \leq V_i \leq V_i^M \quad \text{barras P, PQ}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

onde todas as variáveis foram definidas anteriormente.

No entanto, o processo de solução deste problema por métodos de otimização baseados no método de Newton tendem a encontrar dificuldades na solução do sistema linear a cada iteração. Isto ocorre por que várias das matrizes de segunda derivada das equações de (4.37) são esparsas, o que gera problemas de condicionamento numérico. Para superar esta dificuldade, propõe-se aumentar o conjunto de variáveis, adicionando-se uma variável auxiliar z_j correspondente a cada área j na terceira Eq. (4.29), isto é,

$$Q_{g_{r_i}} - Q_{d_i}^0 - Q_i(e, f) + z_j = 0$$

A função Lagrangeana para o problema expresso pela Eq. (4.37) é dada por,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\mathbf{y}) = & f(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{z}) + \lambda_p^t \Delta \mathbf{P} + \lambda_q^t \Delta \mathbf{Q} + \lambda_v^t \Delta \mathbf{V} \\
 & + \pi_{Q_g}^t (\mathbf{F}_{Q_g} \mathbf{Q}_g + \mathbf{s}_{Q_g} - \mathbf{Q}_g^{lim}) + \pi_v^t (\mathbf{F}_v \mathbf{V}^2 + \mathbf{s}_v - \mathbf{V}^{lim}) \\
 & + \mu \sum \ln s_{Q_g} + \mu \sum \ln s_v
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

onde λ_p , λ_q e λ_v são os multiplicadores de Lagrange referentes às res-

trições de igualdade que representam os desbalanços de potência ativa, potência reativa e tensão. π_{Q_g} e π_v são os multiplicadores referentes às restrições de desigualdade que limitam a geração de potência reativa nas barras P e PV; e referentes às restrições de tensão nas barras P e PQ, respectivamente. s_{Q_g} e s_v são as variáveis de folga que correspondem ao tratamento das restrições de desigualdade pelo método Primal-Dual de Pontos Interiores (PDPI), identificadas com os mesmos índices dos multiplicadores a que se relacionam. Detalhes sobre o método PDPI estão apresentados no Apêndice A. Os vetores \mathbf{Q}_g e \mathbf{V}^2 são expressos como

$$\mathbf{Q}_g = \mathbf{Q}_d^0 + \mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \quad \text{e} \quad \mathbf{V}^2 = \mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2$$

tal que todas as demais variáveis foram anteriormente definidas.

As condições de otimalidade de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \nabla_e \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \nabla_e f(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_1^t \lambda_p + (\mathbf{J}_3^*)^t \lambda_q + \mathbf{J}_5^t \mathbf{F}_v^t \pi_v \\
 \nabla_f \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \nabla_f f(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_2^t \lambda_p + (\mathbf{J}_4^*)^t \lambda_q + \mathbf{J}_6^t \mathbf{F}_v^t \pi_v \\
 \nabla_z \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \mathbf{F}_n \\
 \nabla_{\lambda_p} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \Delta \mathbf{P} \\
 \nabla_{\lambda_q} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \Delta \mathbf{Q} \\
 \nabla_{\lambda_v} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \Delta \mathbf{V} \\
 \nabla_{\pi_{Q_g}} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \mathbf{F}_{Q_g} (\mathbf{Q}_d^0 + \mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f})) + s_{Q_g} - \mathbf{Q}_g^{lim} \\
 \nabla_{\pi_v} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \mathbf{F}_v (\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2) + s_v - \mathbf{V}^{lim} \\
 \nabla_{s_{Q_g}} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \mathbf{S}_{Q_g} \pi_{Q_g} - \mu \mathbf{u} \\
 \nabla_{s_v} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \mathbf{S}_v \pi_v - \mu \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

tal que

$$\begin{aligned}
\nabla_e f(\mathbf{x}) &= 2\mathbf{e} \times (\mathbf{u} - (\mathbf{V}^r / \sqrt{((\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2))})) \\
\nabla_f f(\mathbf{x}) &= 2\mathbf{f} \times (\mathbf{u} - (\mathbf{V}^r / \sqrt{((\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2))})) \\
\mathbf{Q}_g^{lim} &\triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_g^M \\ -\mathbf{Q}_g^m \end{bmatrix}_{(2n_g \times 1)} ; \quad \mathbf{V}^{lim} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{M^2} \\ -\mathbf{V}^{m^2} \end{bmatrix}_{(2n_s \times 1)} \\
\mathbf{F}_{Q_g} &\triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}_{(2n_g \times n_g)} ; \quad \mathbf{F}_v \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}_{(2n_s \times n_s)} \\
\boldsymbol{\pi}_{Q_g} &\triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_{Q_g}^M \\ \boldsymbol{\pi}_{Q_g}^m \end{bmatrix}_{(2n_g \times 1)} ; \quad \boldsymbol{\pi}_v \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_v^M \\ \boldsymbol{\pi}_v^m \end{bmatrix}_{(2n_s \times 1)} \\
\mathbf{S}_{Q_g} &\triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{Q_g}^M \\ \mathbf{s}_{Q_g}^m \end{bmatrix}_{(2n_g \times 1)} ; \quad \mathbf{S}_v \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_v^M \\ \mathbf{s}_v^m \end{bmatrix}_{(2n_s \times 1)}
\end{aligned}$$

onde n_g é o número de geradores, n_s é o número total de barras PQ e P; O vetor \mathbf{u} é unitário de ordem $n_b \times 1$. \mathbf{S}_{Q_g} e \mathbf{S}_v são matrizes diagonais com elementos dos vetores \mathbf{s}_{Q_g} e \mathbf{s}_v . A matriz \mathbf{I} é definida tal que possui todos os termos nulos, exceto os termos referentes às barras reguladoras, que são unitários. As matrizes $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3, \mathbf{J}_4, \mathbf{J}_5, \mathbf{J}_6$ são calculadas como na seção 4.23, onde foi considerada a inclusão das restrições de alinhamento.

Desde que o número de variáveis auxiliares é igual ao número de áreas e o número de geradores de regulação é maior do que o número de áreas, \mathbf{F}_n é uma matriz esparsa, de ordem $(n_{pq} + n_{pi} + n_{gr}) \times n_{pi}$ e posto igual a n_{pi} , cujos elementos são definidos pela equação,

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_n(i,j) &= 1, & \text{se o gerador } i &\text{ pertence a área } j \\
\mathbf{F}_n(i,j) &= 0, & \text{se o gerador } i &\text{ não pertence a área } j
\end{aligned}$$

A solução da Eq. (4.39) através do Método de Newton requer que a cada iteração seja resolvido um sistema linear da forma,

onde \mathbf{I}_q e \mathbf{I}_v são matrizes identidade de dimensão adequada, e \mathbf{u} é um vetor unitário. \mathbf{z} é um vetor coluna, de ordem n_{pi} , cujas componentes são as variáveis auxiliares mencionadas anteriormente.

As demais matrizes são calculadas de acordo com

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_1 &= \nabla_{ee}^2 f(\mathbf{x}) + \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_p) \mathbf{G} + \mathbf{G} \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_p) - (\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_q) \mathbf{B} \\
 &\quad + \mathbf{B} \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_q)) + 2 \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_v) \\
 \mathbf{G}_2 &= \nabla_{ef}^2 f(\mathbf{x}) + \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_p) \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_p) + (\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_q) \mathbf{G} - \mathbf{G} \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_q)) \\
 \mathbf{G}_3 &= \nabla_{ff}^2 f(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_1 \\
 \mathbf{J}_{tp} &= \mathbf{0}(nb, nb) \\
 \mathbf{J}_{qq} &= \mathbf{I}(nb, nb) \\
 \mathbf{J}_{tv} &= \mathbf{0}(nb, nb) \\
 \mathbf{H}_q &= \mathbf{F}_q \begin{bmatrix} \mathbf{J}_3^*(bge, bsf) & \mathbf{J}_4^*(bge, bsf) & \mathbf{J}_{qq}(bge, :) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{H}_v &= \mathbf{F}_v \begin{bmatrix} \mathbf{J}_5(bsp, bsf) & \mathbf{J}_6(bsp, bsf) & \mathbf{J}_{tv}(bsp, :) \end{bmatrix} \\
 \nabla_{eff}^2 f(\mathbf{x}) &= \text{diag}((\mathbf{V}_r \times \mathbf{e} \times \mathbf{f}) / V^3) \\
 \nabla_{ee}^2 f(\mathbf{x}) &= \text{diag}(2(\mathbf{u} - \mathbf{V}_r / \mathbf{V} + (\mathbf{V}_r \times \mathbf{e}^2) / V^3)) \\
 \nabla_{ff}^2 f(\mathbf{x}) &= \text{diag}(2(\mathbf{u} - \mathbf{V}_r / \mathbf{V} + (\mathbf{V}_r \times \mathbf{f}^2) / V^3))
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

onde $\mathbf{0}$ é uma matriz nula de dimensão $n_b \times n_b$. \mathbf{H}_{q1}^t , \mathbf{H}_{q2}^t e \mathbf{H}_{q3}^t são submatrizes de \mathbf{H}_q , calculadas pela multiplicação dos termos condizentes do vetor \mathbf{F}_q com as matrizes $\mathbf{J}_3(bge, bsf)$, $\mathbf{J}_4(bge, bsf)$ e $\mathbf{J}_{qq}(bge, :)$, respectivamente. Da mesma maneira, \mathbf{H}_{v1}^t , \mathbf{H}_{v2}^t e \mathbf{H}_{v3}^t são submatrizes de \mathbf{H}_v , determinadas pela multiplicação dos termos condizentes do vetor \mathbf{F}_v com as matrizes $\mathbf{J}_5(bge, bsf)$, $\mathbf{J}_6(bge, bsf)$ e $\mathbf{J}_{tv}(bge, :)$. Nesta notação, *bge* representa o conjunto de todas as barras de geração, *bsf* representa o conjunto de todas as barras exceto a de folga e o símbolo $(:)$ representa o conjunto de todas as barras.

Observe que na solução do problema de FPO as equações de alinhamento das barras reguladoras são satisfeitas e a potência reativa gerada nas barras de regulação é calculada com base na $Q_{gri} - Q_{di} - Q_i(e, f) = 0$. Isto implica valor nulo para as componentes do vetor \mathbf{z} no final do processo iterativo, indicando que estas variáveis não exercem nenhuma influência na qualidade da solução do fluxo de potência.

4.5.2 Máximo carregamento

Para este problema de otimização, as variáveis são as componentes real e imaginária da tensão complexa nas barras, a variável auxiliar z_j , e fator de carregamento ρ , também utilizado para parametrizar as expressões de balanço de potência. As demais suposições propostas

para o problema de mínimo desvio de tensão são mantidas.

A parametrização utilizada foi:

$$\begin{aligned} P_d &= P_d^0 + \rho^2 \Delta P_d \\ Q_d &= Q_d^0 + \rho^2 \Delta Q_d \end{aligned} \quad (4.42)$$

tal que P_d^0 e Q_d^0 representam a potência ativa e reativa demandadas no caso base. ΔP_d e ΔQ_d representam a variação destas demandas. O fator ρ^2 garante que a demanda não será reduzida, mesmo para valores negativos do fator de carga.

O problema de otimização é dado por,

$$\begin{aligned} &\text{Maximize } \rho \\ &\text{sujeito a } \begin{aligned} \Delta P_i &= P_{g_i} - (P_{d_i}^0 + \rho^2 \Delta P_{d_i}) - P_i(e, f) = 0 \\ \Delta Q_i &= Q_{g_i} - (Q_{d_i}^0 + \rho^2 \Delta Q_{d_i}) - Q_i(e, f) = 0 \\ \Delta Q_{r_i} &= Q_{g_{r_i}} - Q_{d_i}^0 - Q_i(e, f) = 0 \\ \Delta V_i &= V_i^{r^2} - (e_i^2 + f_i^2) = 0 \end{aligned} \\ &\quad \begin{aligned} P_{g_i}^m &\leq P_{g_i} \leq P_{g_i}^M \\ Q_{g_i}^m &\leq Q_{g_i} \leq Q_{g_i}^M \\ V_i^m &\leq V_i \leq V_i^M \end{aligned} \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde todas as variáveis foram definidas anteriormente. As restrições correspondem às barras da forma mostrada na Eq. (4.37), com a inclusão da barra de folga em cada uma das equações. Além disso, a restrição de geração de potência ativa P_{g_i} foi considerada.

As condições de otimalidade de primeira ordem de Karush-Kuhn-

Tucker (KKT) são dadas por:

$$\begin{aligned}
\nabla_e \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \mathbf{J}_1^t \boldsymbol{\lambda}_p + (\mathbf{J}_3^*)^t \boldsymbol{\lambda}_q + \mathbf{J}_{5p}^t \boldsymbol{\lambda}_v + \mathbf{J}_{5b}^t \mathbf{F}_v^t \boldsymbol{\pi}_v \\
\nabla_f \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \mathbf{J}_2^t \boldsymbol{\lambda}_p + (\mathbf{J}_4^*)^t \boldsymbol{\lambda}_q + \mathbf{J}_{6p}^t \boldsymbol{\lambda}_v + \mathbf{J}_{6b}^t \mathbf{F}_v^t \boldsymbol{\pi}_v \\
\nabla_z \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \mathbf{F}_n \\
\nabla_\rho \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= 1 + 2\rho \Delta \mathbf{P}_d^t \boldsymbol{\lambda}_p + 2\rho \Delta \mathbf{Q}_d^t \boldsymbol{\lambda}_q \\
\nabla_{\lambda_p} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \Delta \mathbf{P} \\
\nabla_{\lambda_q} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \Delta \mathbf{Q} \\
\nabla_{\lambda_v} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \Delta \mathbf{V}_p \\
\nabla_{\pi_{P_g}} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \mathbf{F}_{P_g} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{g}} + \mathbf{s}_{P_g} - \mathbf{P}_{\mathbf{g}}^{lim} \\
\nabla_{\pi_{Q_g}} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \mathbf{F}_{Q_g} \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{g}} + \mathbf{s}_{Q_g} - \mathbf{Q}_{\mathbf{g}}^{lim} \\
\nabla_{\pi_v} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \mathbf{F}_v (\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2) + \mathbf{s}_v - \mathbf{V}^{lim} \\
\nabla_{s_{P_g}} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \mathbf{S}_{P_g} \boldsymbol{\pi}_{P_g} - \mu \mathbf{u} \\
\nabla_{s_{Q_g}} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \mathbf{S}_{Q_g} \boldsymbol{\pi}_{Q_g} - \mu \mathbf{u} \\
\nabla_{s_v} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \mathbf{S}_v \boldsymbol{\pi}_v - \mu \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

onde todas as matrizes são as mesmas definidas na subseção 4.5.1.

A solução da Eq. (4.39) através do Método de Newton requer que a cada iteração seja resolvido um sistema linear da forma,

onde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_1 &= \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_p)\mathbf{G} + \mathbf{G}\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_p) - (\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_q)\mathbf{B} \\
 &\quad + \mathbf{B}\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_q)) + 2\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_v) + 2\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_v) \\
 \mathbf{G}_2 &= \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_p)\mathbf{B} - \mathbf{B}\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_p) + (\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_q)\mathbf{G} - \mathbf{G}\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_q)) \\
 \mathbf{H}_p &= \mathbf{F}_p \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1(bge, :) & \mathbf{J}_2(bge, :) & \mathbf{J}_{tp}(bge, :) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{H}_q &= \mathbf{F}_q \begin{bmatrix} \mathbf{J}_3^*(bge, :) & \mathbf{J}_4^*(bge, :) & \mathbf{J}_{qq}(bge, :) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{H}_v &= \mathbf{F}_v \begin{bmatrix} \mathbf{J}_5(bsp, :) & \mathbf{J}_6(bsp, :) & \mathbf{J}_{tv}(bsp, :) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Nesta notação *bsp* representa o conjunto que contém as barras *PV* e *PQV*, e os demais conjuntos de barras já foram definidos anteriormente.

4.6 Conclusão

Neste capítulo, foi apresentada a modelagem do problema de fluxo de potência convencional em coordenadas retangulares. Em seguida, propôs-se uma estratégia de extensão deste modelo analítico de forma a aumentar o número de variáveis deste problema. Quando o método de Newton-Raphson é aplicado nesta situação, é necessário obter a solução de um sistema linear subdeterminado, a qual é composta de um termo consideravelmente associado ao processo iterativo e outro termo que permite melhorar índices pré-escolhidos, relacionados ao desempenho do sistema. Posteriormente, abordou-se a inclusão das restrições que modelam o CST no problema de fluxo de potência. Todas as modelagens foram baseadas no método de Newton-Raphson.

Apresentou-se também a inclusão do CST no problema de fluxo de potência ótimo. Como objetivos modelados neste problema, foram apresentados a minimização dos desvio quadráticos da magnitude de tensão de um valor pré-especificado e a maximização do carregamento da rede. O método de solução abordado foi o método de Newton com estratégia Primal-Dual de Pontos Interiores para tratar as restrições de desigualdade. Mais detalhes sobre o método PDPI podem ser encontrados no Apêndice A.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1 Aspectos computacionais

Os métodos apresentados nas seções anteriores foram implementados na plataforma Matlab (versão R2010b) , disponibilizado pelo Laboratório de Sistemas de Potência (LABSPOT), da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Os testes foram realizados em um computador de 3.4 Ghz e 4GB de memória RAM.

Para implementar o método de otimização baseado em Programação Quadrática Sequencial (PQS) utilizou-se o aplicativo computacional KNITRO (versão 9.0.1), em sua interface para Matlab. O KNITRO (Nonlinear Interior-point Trust Region Optimizer) é uma biblioteca de programas computacionais de otimização, desenvolvida para encontrar soluções para modelos de otimização contínuos e discretos. Este aplicativo permite resolver problemas de Programação Linear, Quadrática ou Não Linear, irrestritos ou restritos. Para tratar as restrições de desigualdade, é possível escolher entre as estratégias de barreira logarítmica e do Conjunto Ativo. É possível ainda deixar esta escolha para o próprio algoritmo de otimização usado no KNITRO, o que é feito de acordo com critérios peculiares ao método utilizado para solucionar o problema de otimização. No presente trabalho selecionou-se a estratégia do Conjunto Ativo, e especificou-se uma tolerância de 10^{-3} para a convergência, num máximo de 50 iterações. Mais informações sobre a interface entre o KNITRO e o MATLAB podem ser encontradas no Apêndice B.

5.2 Sistemas teste

Foram selecionados sistemas teste de 39, 118, 300 barras encontrados em [35]. Também foi selecionado o sistema de 959 barras utilizado em [36]. As principais características de cada sistema do ponto de vista de controle secundário de tensão estão apresentados na tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Principais características dos sistemas teste

Sistema teste	Número de barras (n_b)	Número de Áreas	Número de reguladores (n_{gr})	Número de equações FPE (n_{eq})	Número de variáveis FPE (n_{vr})
A	39	3	6	76	82
B	118	4	27	234	261
C	300	3	25	598	625
D	959	13	97	1916	2013

5.3 Fluxo de Potência estendido

5.3.1 Processo computacional

Inicialmente testou-se o método de FPE apresentado em 4.3 com o sistema de 300 barras, em comparação com o método de Newton-Raphson (N-R) para resolver o problema de fluxo de potência convencional. O método de FPE considerou o mínimo desvio de potência reativa como função objetivo do problema de otimização que determina a componente de espaço nulo.

A Figura 5.1 apresenta os principais aspectos do processo computacional, de acordo com: a) a solução do fluxo de potência convencional via método de Newton-Raphson, b) solução de mínima norma Euclidiana e c) solução geral considerando a componente de espaço nulo, em relação ao máximo desbalanço de cada equação apresentada em (4.7).

Os métodos convergiram em 4, 7 e 9 iterações, respectivamente. Estes resultados foram obtidos utilizando-se $\alpha = 0.15$ na expressão (4.11), limitando a 15% a participação da solução de espaço nulo na determinação da solução geral. Observa-se que a inclusão da solução de espaço nulo requer iterações extras para alcançar o mínimo desvio quadrático de potência reativa. Porém, este valor de α produziu uma redução de 24% no desvio de potência reativa em relação à solução de fluxo de potência convencional. Observa-se também pela Figura 5.1 que a magnitude de uma das figuras de mérito subiu da segunda para a terceira iteração. Isto ocorre por que o método iterativo atinge altos valores de potência reativa durante a solução do problema 4.21, uma vez que não são consideradas restrições de potência reativa. Quando se aumenta o valor de α (e consequentemente aumenta-se a influência da solução de espaço nulo), o pico visto na Figura tende a aumentar e o processo iterativo tende a demorar mais para convergir. Do ponto de vista de perfil de tensão, no entanto, as soluções dos métodos foram muito semelhantes, apresentando mínimo valor de magnitude de tensão

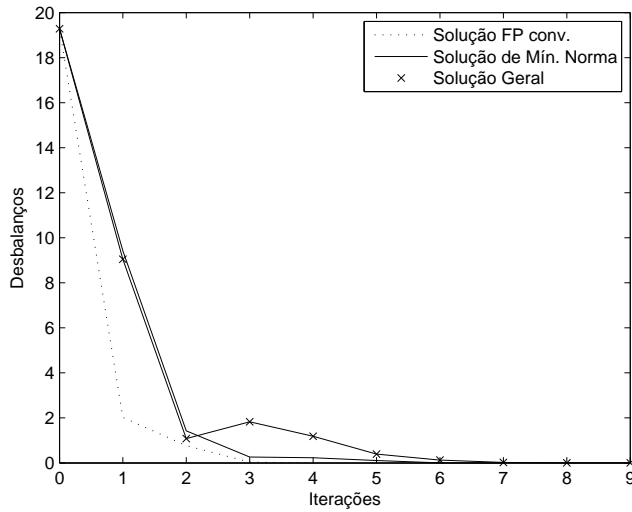


Figura 5.1 – Máximo desbalanço durante as iterações - IEEE300 barras.

igual a $0.92pu$ e máximo valor de magnitude de tensão igual a $1.07pu$ nos três casos.

Adicionalmente, testou-se o sistema de 959 barras utilizando a modelagem convencional de fluxo de potência e a modelagem de fluxo de potência estendido. Ambos os métodos convergiram em 5 iterações. Quanto ao tempo de execução, o fluxo potência estendido convergiu após 7,56s. Parte importante do tempo de execução se deve à rotina de fatoração Q-R do Matlab (utilizada na determinação da solução de espaço nulo), que consumiu 5,58s.

O desempenho computacional do método proposto é apresentado na Figura 5.2, considerando-se a) solução do método convencional de N-R, b) solução de mínima norma e c) solução geral, e considerando-se os máximos desbalanços a cada iteração como figura de mérito. A Figura 5.3 apresenta o comportamento dos desbalanços de potência e magnitude da tensão durante as iterações desses métodos.

Apesar da minimização dos desvios de potência reativa ter sido considerada como a principal meta da determinação da solução de espaço nulo, observa-se que não foram necessárias iterações extras para a convergência do método de FPE. A Figura 5.4, que apresenta a norma infinita a) da solução de mínima norma Euclideana, b) da componente

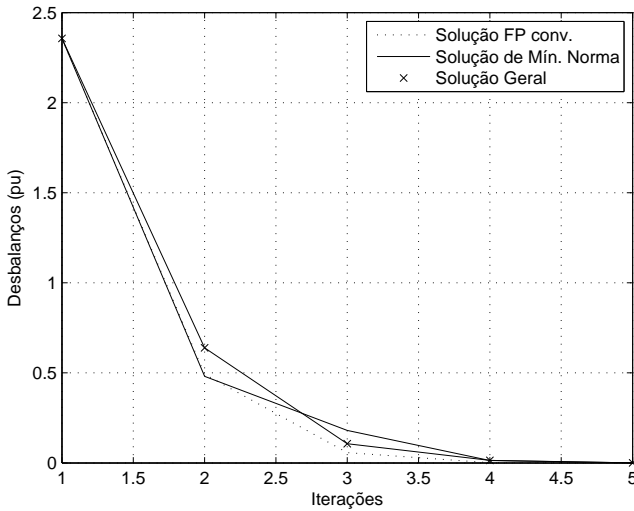


Figura 5.2 – Máximo desbalanço durante as iterações - 959 barras.

de espaço nulo e c) da solução geral, também demonstra que a estratégia na qual o FPE é baseado não exerce influência significativa no número de iterações para a convergência. Observa-se que na segunda iteração, um limite mínimo de potência reativa foi atingido, o que resultou em um crescimento na trajetória das normas das soluções. Nenhum outro limite foi atingido nas iterações seguintes.

Considerou-se então a equação de alinhamento (3.1), referente ao controle secundário de tensão, no problema de fluxo de potência estendido. Nesta abordagem, a solução de espaço nulo foi determinada utilizando o segundo termo da expansão em série de Taylor da Eq. (4.34), no ponto $y^{(k)}$ e na direção Δy , como descrito em 4.23. Esta opção foi escolhida considerando a comprovada redução no número de iterações para convergência, [34]. A função objetivo que minimiza os desvios quadráticos de potência reativa (4.19) não foi utilizada pois torna-se pouco efetivo solucionar tal problema de otimização com o requisito de satisfazer as equações de alinhamento. O método FPE considerando CST foi testado para o sistema de 118 barras, convergindo em 6 iterações, no tempo de 2.54s.

Durante o processo iterativo, a barra de regulação de número 61 atingiu o limite mínimo de geração de potência reativa na primeira

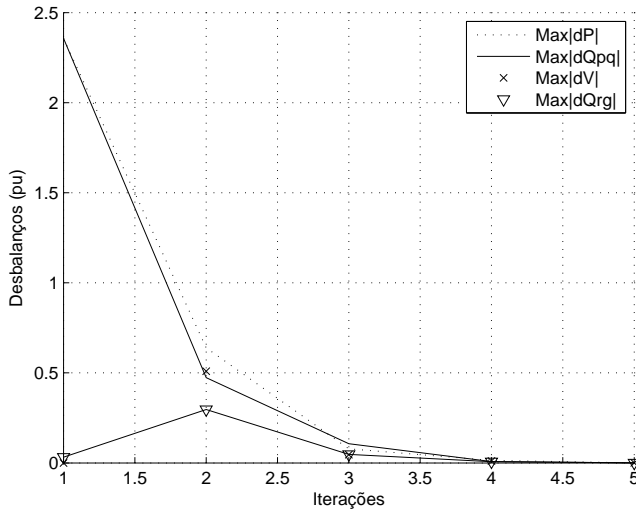


Figura 5.3 – Máximo desbalanço durante as iterações do método FPE - 959 barras.

iteração. Porém, na solução final esta restrição não é ativa.

Testou-se o mesmo método, nas mesmas condições, para os sistemas de 300 e 959 barras. Nas primeiras iterações diversas unidades reguladoras atingiram limites de geração de potência reativa, dificultando o processo iterativo. Neste caso, essas barras de regulação foram convertidas em barras PQ, o que não facilitou a convergência do processo iterativo.

O desempenho computacional do método de FPE com CST para o sistema IEEE118 barras está apresentado na Figura 5.5, a qual mostra os desbalanços de máxima magnitude em cada iteração, sendo $dQ(bqv)$ os desbalanços nas barras de carga e barras piloto, e $dQ(bqr)$ os desbalanços nas barras de geração e regulação.

Nota-se que os desbalanços de potência ativa tiveram trajetória muito semelhantes àqueles resultantes da aplicação do método de FPE sem CST. Do ponto de vista de potência reativa, as equações de alinhamento influenciaram a trajetória dos desbalanços das barras reguladoras, apresentando o maior valor absoluto após a segunda iteração. Observa-se portanto, que satisfazer as equações de alinhamento, restringe a operação do sistema de potência, impondo consideráveis di-

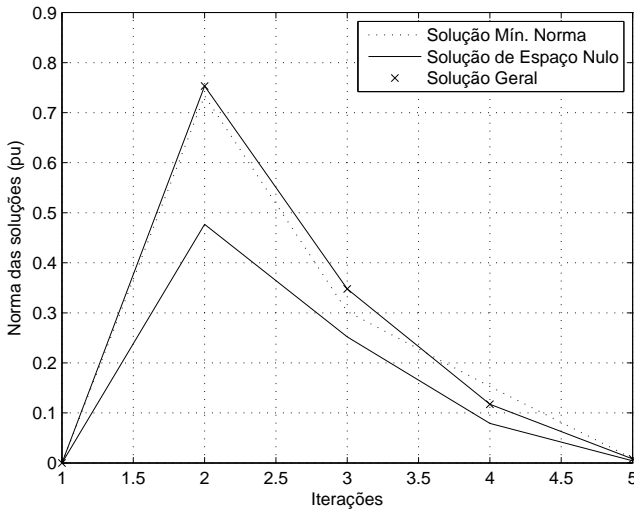


Figura 5.4 – Processo iterativo - 959 barras.

ficuldades no método de solução, e tendo como resultado imediato o acréscimo no número de iterações para a convergência.

5.3.2 Análise das Soluções

Utilizou-se primeiramente o sistema de dados de 300 barras para a análise das soluções fornecidas pelos métodos de Fluxo de Potência (FP) e FPE. A Tabela 5.2 apresenta os resultados preliminares, considerando

- Caso 1: solução do método de N-R para o problema de fluxo de potência convencional,
- Caso 2: solução de mínima norma para o FPE,
- Caso 3: solução geral para o problema de FPE.

Nota-se que as soluções de ambos os métodos são semelhantes quanto ao perfil de tensão. A faixa de variação da magnitude de tensão entre os valores mínimo e máximo foi bastante ampla, o que pode

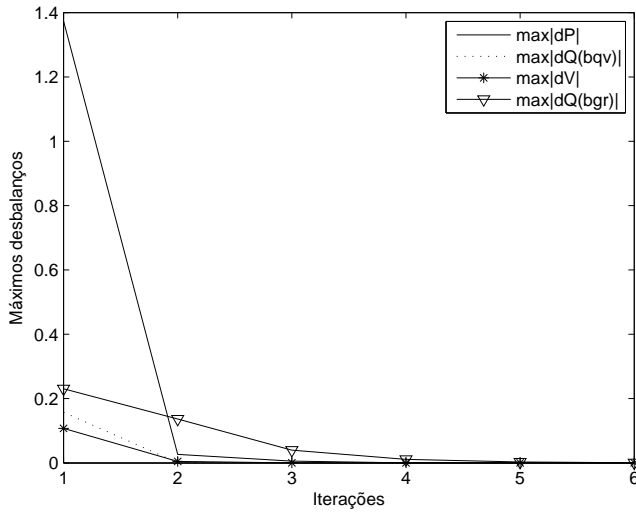


Figura 5.5 – Desbalanços a cada iteração. - IEEE118 barras

resultar em violações de limites e problemas de instabilidade de tensão sob condições de carregamento pesado.

Considerando o desvio quadrático de potência reativa, obteve-se 8,0194 pelo método de N-R, 8,1690 através da solução de mínima norma Euclidiana e 4,1833 no caso da solução geral. Observa-se que a solução de espaço nulo exerce forte influência na solução geral, uma vez que a redução no desvio quadrático foi de 49,3% no caso da solução via N-R e 48,8% no caso da solução de mínima norma. Esta melhor distribuição de geração de potência reativa indica condições favoráveis no que diz respeito à estabilidade de tensão no caso de contingências programadas ou imprevistas.

Adicionalmente, testou-se o sistema de 959 barras com a modelagem de FP e a modelagem de FPE. O processo iterativo de ambos os métodos convergiu em 5 iterações, e o valor do desvio quadrático de potência reativa foi $2858MVAr^2$ e $2044MVAr^2$, respectivamente, correspondendo a uma redução de 28.52%.

A Figura 5.6 apresenta o desvio quadrático de potência reativa durante as iterações, indicando que o uso da componente relativa ao espaço nulo contribui para a melhor distribuição de potência reativa. Novamente, observa-se que o limite de potência reativa atingido du-

Tabela 5.2 – IEEE-300 barras: Resumo das soluções de fluxo de potência

Casos 300b	P_{gs} (MW)	Q_{gs} (MVar)	max V (pu)	min V (pu)	OF_q (pu(Mvar) ²)
Caso 1	4,5405	0,3886	1,0730	0,9290	8,0914
Caso 2	4,4852	0,4027	1,0889	0,9290	8,1690
Caso 3	4,5453	0,4732	1,0943	0,9265	4,1833

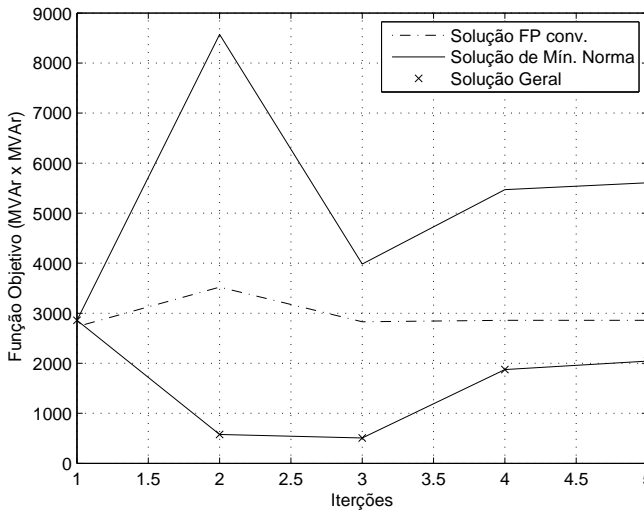


Figura 5.6 – Índice de performance durante as iterações. - 959 barras

rante a segunda iteração ocasionou um pico no gráfico que representa as soluções de mínima norma e solução convencional.

Para avaliar a qualidade da solução do problema de fluxo de potência com restrições de CST, observou-se o perfil de tensão das barras de carga e piloto para o sistema IEEE 118-barras no caso base, cuja carga é denotada *cb*. Na Figura 5.7, V_{pqv} representa a tensão nas barras piloto enquanto que V_{min} e V_{max} representam os valores mínimo e máximo da magnitude de tensão das barras de carga de cada área.

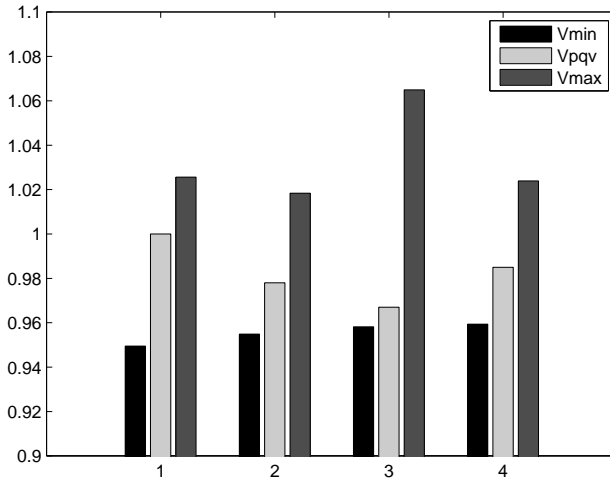


Figura 5.7 – Magnitude de tensão nas barras PQ e PQV - IEEE118 barras

Observa-se que os resultados foram semelhantes aos apresentados na Tabela 5.2.

5.3.3 Análise com variação do carregamento

Buscando averiguar os efeitos da variação de carregamento no problema de fluxo de potência com restrições de CST, selecionou-se a área 1 do sistema IEEE118 barras para observação. Esta área foi selecionada por apresentar o perfil de magnitude de tensão mais reduzido, como pode ser visto na Figura 5.8. Nesta Figura, V_{fp} representa as soluções para o problema de fluxo de potência convencional e V_{svc} representa as soluções do problema com CST.

Em seguida, considerou-se um aumento de carga de 10% na área 1 (caso denotado por $c1$) e um aumento de carga de 10% em todas as áreas (caso denotado por $c2$). A Figura 5.9 apresenta a magnitude da tensão nas barras para os casos base e com aumento de carga. Observa-se que o aumento de carga acentua o perfil de tensão do caso base, isto é, há um aumento na magnitude da tensão das barras que apresentavam

tensão elevada e queda de tensão nas barras com tensão reduzida.

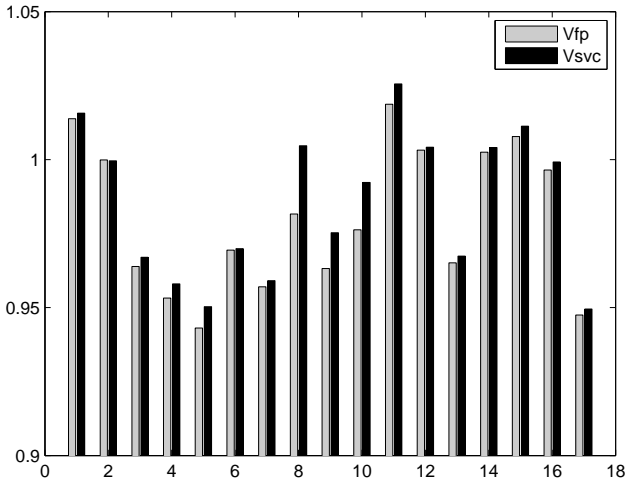


Figura 5.8 – Magnitude de tensão nas barras PQ da área 1 - IEEE118 barras

A seguir, analisou-se o efeito de acréscimos consecutivos de carregamento em todas as áreas. Desta forma, uma sequência de soluções do fluxo de potência foi obtida, aumentando-se a demanda das barras em passos de 5%, mantendo-se constante o fator de potência. O percentual de 41,15% corresponde ao acréscimo máximo para o qual o método iterativo encontra solução real. Nestas condições, as tensões mais baixas foram encontradas novamente na área 1 (o valor mínimo encontrado foi 0,91 p.u.) e as mais altas na área 4 (máxima de 1,5 p.u.). Ressalta-se que esta é uma solução puramente matemática para o problema proposto, a qual corresponde à condição extrema de máximo carregamento, não sendo de nenhuma aplicabilidade na operação do sistema de potência. As soluções de carregamento crítico de uso prático, as quais requerem a imposição de restrições operacionais extras, estão apresentadas na Seção 5.4.3 deste capítulo.

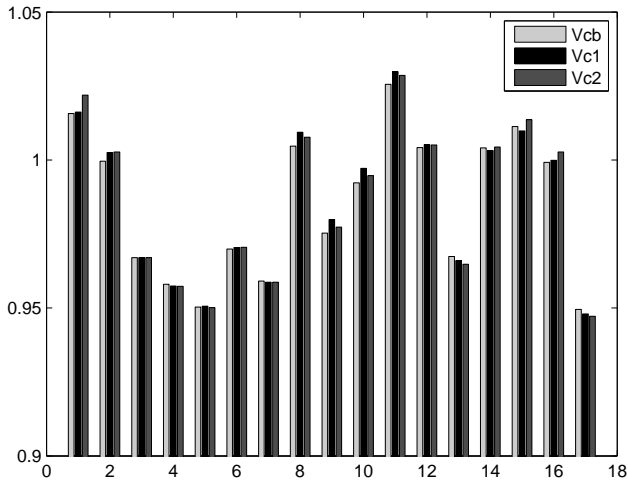


Figura 5.9 – Magnitude de tensão nas barras PQ da área 1 após acréscimo - IEEE118 barras

5.3.4 Análise da seleção das barras de regulação

A injeção de potência reativa em uma barra reguladora influencia diretamente a tensão nesta e nas demais barras reguladoras da área, podendo também influenciar a tensão nas barras de carga da vizinhança. Sob condições de carga pesada, a solução do fluxo de potência com restrições de CST pode resultar em barras de regulação e barras de carga na sua vizinhança com a magnitude das tensões elevadas. A tabela 5.3 apresenta as tensões nas barras reguladoras após um aumento de 10% na demanda com fator de potência constante, para o sistema de 118 barras.

Uma possível estratégia para prevenir tensões altas nestas barras sob condições de carga pesada seria converter as barras de regulação com magnitude da tensão maior do que um valor limite ($1,1p.u.$, por exemplo) na primeira iteração do processo de solução do fluxo de potência com CST em barras PV. Desta forma, duas barras foram sujeitas a conversão *P-PV* (barras 10 e 111). Isto possibilitou um acréscimo de carga de até 86% em relação a carga base (superior aos 41,15% do

Tabela 5.3 – IEEE-118 barras: Tensões nas barras P

Barra	Área	V_{pqv}
10	3	1,1001
12	2	0,9733
25	3	1,0546
26	3	1,0362
46	2	1,0162
49	1	1,0348
54	1	0,9677
59	1	0,9978
61	1	1,0214
65	1	1,0179
66	1	1,0790
80	4	1,0563
89	4	1,0534
100	4	1,0153
103	4	0,9914
111	4	1,4188

caso anterior). Na condição de máximo carregamento, apenas a área 3 ainda apresentava a margem de geração de potência reativa que permite o controle secundário de tensão. Nas outras áreas, as barras de regulação atingiram o limite máximo de geração de potência reativa.

Testes adicionais revelaram que esta estratégia não surtiu o efeito esperado quando aplicada para o sistema de 300 barras. Neste caso, a conversão *P-PV* foi também realizada durante as iterações, o que também não foi efetivo uma vez que a grande maioria das barras P precisou ser convertida em barras PV e o controle secundário de tensão se tornou inviável. Deve ser observado que a conversão *P-PV* torna diferentes os dois conjuntos de barras de regulação dos casos analisados, sendo pouco previsível a efetividade desta modificação sem um estudo prévio da seleção das barras de regulação. A conversão *P-PV* serve para demonstrar a importância de se limitar as tensões nas barras e da escolha das barras reguladoras e barras de geração em cada área, mas é ineficiente para maiores aplicações práticas.

5.3.5 Análise da seleção de barras piloto

Considerando as barras piloto pré-selecionadas no arquivo base do sistema IEEE300-barras, cujos dados principais são apresentados de maneira resumida na tabela 5.4, procurou-se fazer alguns experimentos visando avaliar a sensibilidade deste tipo de barra. As colunas 1 e 2 mostram as áreas e as correspondentes barras piloto. A terceira coluna apresenta a magnitude da tensão especificada nas barras piloto selecionadas.

Tabela 5.4 – IEEE-300 barras: Resumo das soluções de fluxo de potência

Área	Barra	V_{pqv}
1	51	0,9607
2	43	0,978
3	23	1,0
4	83	0,985

Inicialmente optou-se por selecionar a barra 50 (ao invés da barra 51) como barra piloto na área 1. Para esta finalidade, foi especificada a tensão de 1,0 p.u. para a barra 50. Não foram notadas alterações substanciais no resultado do problema de fluxo de potência em relação ao sistema original. No entanto, ao variar a tensão especificada da barra 51 o processo iterativo tem dificuldades de convergência, indicando a importância de um estudo cujo objetivo é a especificação da magnitude da tensão da barra piloto.

Na continuidade dos testes, selecionou-se a barra 41 como barra piloto da área 2, em substituição à barra 43. Com base no valor nominal e no valor obtido da solução do fluxo de potência, nos dois testes seguintes especificou-se a magnitude da tensão da barra 41 em 1,0 e 0,967 pu (resultado da solução do problema de fluxo de potência convencional). Porém, esta mudança dificultou a convergência do processo computacional. Observou-se que a seleção da barra 41 como barra piloto não é efetiva, pois mesmo a alteração da magnitude da tensão nesta barra não é suficiente para fazer com que uma simples solução do fluxo de potência com restrições de CST seja obtida. Isto mostra que a escolha de barras piloto influencia diretamente na solução do problema de controle secundário de tensão.

5.4 Fluxo de Potência Ótimo com restrições de Controle Secundário de Tensão

5.4.1 Processo computacional

Considerando a modelagem do problema de FPO com restrições de CST apresentada na seção 4.5.1, dois métodos iterativos foram testados: a) PQS e b) PDPI. O método de PQS foi implementado via aplicativo computacional *KNITRO*, com estratégia de *conjunto ativo* para tratar as restrições de desigualdade.

Para o sistema de 39 barras, o processo iterativo correspondente à aplicação do método de PQS convergiu em 4 iterações em um tempo de 1,50s, enquanto que o método PDPI determinou a mesma solução em 7 iterações, no tempo de 1,68s.

Para o sistema de 959 barras, o método PQS forneceu uma solução após 4 iterações, em 13,76s. O método PDPI obteve a mesma solução em 7 iterações, mas em apenas 8,37s. Esta diferença de tempo ocorre porque a cada iteração do método PQS um novo problema de programação quadrática é resolvido com estratégia de conjunto ativo, convergindo em média após 3 iterações. Como o problema possui um número elevado de restrições de desigualdade, este processo acaba tomando algum tempo graças aos testes envolvendo a violação de restrições.

As Tabelas 5.5 e 5.6 apresentam o desempenho dos métodos utilizados. Na Tabela 5.5, a primeira coluna apresenta a iteração corrente e as colunas de 2 a 6 mostram as figuras de mérito associadas às condições de Karush Kuhn Tucker (KKT); isto é, $J * l$ é a derivada da função Lagrangeana em relação às variáveis de otimização, dP representa o desbalanço de potência ativa das barras, $dQ(bvq)$ e $dQ(brv)$ são respectivamente o desbalanço de potência reativa das barras de carga e piloto, e o desbalanço de potência reativa das barras de geração e regulação, e $dV2$ é o desbalanço de magnitude da tensão das barras piloto e geração. Na Tabela 5.6, a segunda coluna apresenta o valor da função objetivo e a terceira coluna apresenta o valor da variável auxiliar z a cada iteração.

Observa-se na Tabela 5.5 que apesar do método PDPI ter requerido mais iterações para a convergência do processo iterativo, as trajetórias das figuras de mérito selecionadas para comparação com o método de Programação Quadrática Sequencial com Conjunto Ativo (PQS-CA) foram muito semelhantes. Nota-se em 5.6 que após a quarta iteração do

Tabela 5.5 – Figuras de mérito do processo iterativo - sistema de 959 barras

Método de PQS com Conjunto Ativo (CA)					
Iter.	$Max(J * l)$	$Max(dP)$	$Max(dQ(bvq))$	$Max(dQ(brv))$	$Max(dV2)$
1	1,0344e+003	7,3197e-007	2,1897e-002	4,8985e-001	1,1696e-004
2	7,3184e-001	7,6140e-005	4,9940e-004	2,4567e-001	6,4736e-006
3	1,7061e-002	8,1863e-005	1,5404e-006	3,1306e-003	3,9404e-007
4	2,7879e-004	1,3024e-007	9,0165e-009	1,8695e-006	1,7717e-008
Método PDPI					
Iter.	$Max(J * l)$	$Max(dP)$	$Max(dQ(bvq))$	$Max(dQ(brv))$	$Max(dV2)$
1	1,0344e+003	7,3197e-007	2,1897e-002	4,8985e-001	1,1696e-004
2	2,7620e+000	7,6064e-005	5,0985e-004	2,4567e-001	6,4672e-006
3	2,0657e+000	8,1743e-005	1,5384e-006	3,0379e-003	3,9379e-007
4	2,1427e-002	9,3365e-008	8,9429e-009	3,0610e-006	1,7912e-008
5	1,1789e-005	4,6734e-011	4,2344e-011	1,5335e-009	8,9646e-012
6	5,9318e-009	3,2596e-012	1,5181e-011	7,6744e-013	4,6629e-015
7	2,9167e-012	9,3241e-012	1,3745e-011	5,9952e-014	2,2204e-016

método PDPI o valor da função objetivo não sofreu alteração significativa. As condições de otimalidade referentes às variáveis de folga foram aquelas que ocasionaram as iterações extras em relação ao processo iterativo relativo ao método PQS-CA. Estas condições estão representadas na figura 5.10, onde $max|dLdsqg|$ é o valor máximo absoluto das derivadas da função Lagrangena em relação às variáveis de folga s_{qg} , e $max|dLdsv|$ é o valor máximo absoluto das derivadas da função Lagrangena em relação às variáveis de folga s_v . Nota-se que na quarta iteração o valor das figuras de mérito em questão são da ordem de 10^{-1} , sendo necessárias 3 iterações adicionais para satisfazer a tolerância de 10^{-3} imposta às condições de otimalidade.

5.4.2 Análise das Soluções

A Tabela 5.7 mostra os resultados preliminares para o sistema de 39 barras, obtidos pelos métodos FPE e FPO. Nota-se que mesmo sendo de porte reduzido, o sistema teste na solução do problema de FPE um limite máximo de tensão (1.05 p.u.) é violado. Isto é devido à não inclusão dos limites de tensão na formulação analítica do FPE. Por outro lado, esses limites são considerados no problema de FPO e portanto são satisfeitos pela solução obtida, como mostra a segunda

Tabela 5.6 – Desempenho dos métodos para o sistema de 959 barras

Método de PQS com CA		
Iter.	<i>FO</i>	<i>dz</i>
1	5,1079e-007	0000
2	1,2622e-002	4,9645e-017
3	1,1951e-002	3,0778e-014
4	1,1883e-002	2,9586e-015

Método PDPI		
Iter.	<i>FO</i>	<i>dz</i>
1	5,1079e-007	0000
2	1,2609e-002	3,6446e-017
3	1,1949e-002	1,0869e-016
4	1,1883e-002	7,7923e-017
5	1,1883e-002	9,2167e-017
6	1,1883e-002	1,4128e-016
7	1,1883e-002	1,1869e-016

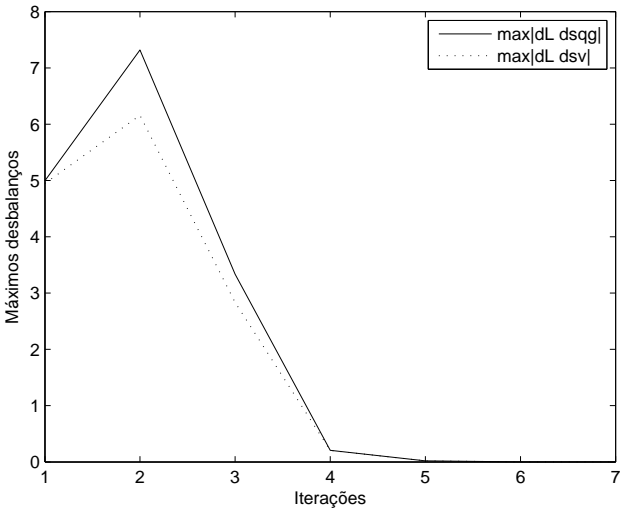


Figura 5.10 – Desbalanços a cada iteração. - 959 barras

linha/coluna da tabela.
Além disso, como o fator de carga utilizado foi o mesmo nos

dois casos, nota-se que os valores de geração de potência ativa e reativa são superiores na solução obtida via método de FPE, indicando maiores perdas de potência ativa no sistema de transmissão. A análise da tabela 5.8 revela que o problema de FPO também possibilitou melhor distribuição de potência reativa por área, uma vez que as unidades reguladoras da área 1 produziram 62.68% da capacidade reativa total contra 93.75% das unidades na mesma área na solução determinada via FPE.

Tabela 5.7 – Resumo das soluções para o sistema de 39 barras

Método	Max(V)	Min(V)	Pg(MW)	Qg(MVAr)
FPE	1,0560	0,9735	63,8439	15,6174
FPO	1,0379	0,9648	61,4427	13,7266

Tabela 5.8 – Porcentagem de potência ativa gerada em cada área - 39 barras

Método	Área 1	Área 2	Área 3
FPE	0,9375	0,0237	0,6629
FPO	0,6268	0,0719	0,6715

Apesar destes resultados promissores, tanto o método PDPI quanto o método de PQS-CA falharam em manter o desempenho com aumento de carga. Ambos os métodos permitiram apenas um acréscimo de 3% da carga total, enquanto o método para FPE permitiu um acréscimo de 10%. Isto resulta da imposição de restrições operacionais no problema de FPO, que apesar de produzir soluções melhores sob o ponto de vista prático, dificulta a convergência do processo iterativo. Os métodos para solução do problema de FPE são mais robustos, mas por vezes apresentam soluções puramente matemáticas e não utilizáveis na prática.

Visando observar a influência dos limites na determinação das soluções via FPE e FPO, foi adotada uma relaxação de 30% nos limites de geração de potência reativa das barras reguladoras, e uma elevação no limite máximos de tensão para 1.1p.u.. Os resultados correspondentes a esta modificação estão apresentados nas tabelas 5.9 e 5.10. Nestas tabelas, F_c , $Max(V)$, $Min(V)$ e $Q_g(\%)$ denotam respectivamente o fator de carga percentual, os valores máximo e mínimo da

magnitude da tensão (em por unidade) e a percentagem de potência reativa gerada em cada área.

Tabela 5.9 – Resumo das soluções com acréscimo de carga - 39 barras

Método	Fc	Max(V)	Min(V)
FPE	1,03	1,0560	0,9735
FPO via PQS	1,03	1,0686	0,9732
FPE	1,10	1,1144	0,9724
FPO via PQS	1,10	1,0813	0,9723

Tabela 5.10 – Porcentagem de potência reativa gerada em cada área - 39 barras

Método	Fc	$Q_g(\%)$ Área 1	$Q_g(\%)$ Área 2	$Q_g(\%)$ Área 3
FPE	1,1	1,0000	-0,1085	0,6990
FPO	1,1	0,9126	-0,0181	0,5486

Os resultados apresentados na Tabela 5.9 indicam que para um aumento de carga de 10%, o limite máximo da magnitude da tensão é violado na solução obtida via FPE. A tabela 5.10 mostra que isto é uma consequência do limite de geração de potência reativa ter sido atingido na área 1, o que deixa a mesma sem controle CST. Isto confirma que as soluções obtidas via FPO são mais úteis do ponto de vista prático.

A seguir, verificou-se o efeito da variação da magnitude da tensão das barras piloto face a um aumento do carregamento. Neste caso, foi considerado um incremento de 10% na carga total do sistema, mantendo o fator de potência constante. Observou-se uma sensibilidade grande do ponto de operação do sistema em relação a este parâmetro, uma vez que a tensão na barra piloto influencia a estratégia de CST da área. Por exemplo, na área 1 a alteração de tensão de 0.988p.u. para 0.99p.u. resulta num aumento de geração de potência reativa de 3.2% em toda área, em relação à capacidade total. Aumentando-se a tensão para 0.995p.u. ou reduzindo-se a mesma para 0.985p.u. o processo computacional diverge, o que mostra a influência da tensão na barra piloto desta área na situação extrema imposta.

No entanto, outros aspectos foram observados alterando-se a tensão da barra piloto da área 2. Variando-se a mesma de 0.998p.u. para

1.0p.u., os reguladores de potência reativa da área passaram a gerar potência reativa (ao invés de consumir, como mostrado na Tabela 5.10), o que aliviou um pouco a situação crítica de geração em que se encontravam as unidades da área 1. Variando-se a magnitude da tensão da barra piloto da área 2 de 1.00p.u. para 1.05p.u., observou-se que a área 2 passou a ser a maior fornecedora de potência reativa no sistema. Os resultados resumidos estão apresentados na tabela 5.11, onde a tensão na barra piloto da área 2 em cada caso testado é apresentada na segunda coluna e denotada V_{pi} , e $Q_g(\%)$ foi definida anteriormente.

Tabela 5.11 – Porcentagem de potência ativa gerada em cada área - 39 barras

Caso	V_{pi}	$Q_g(\%)$	$Q_g(\%)$	$Q_g(\%)$
		Área 1	Área 2	Área 3
Caso a	0,998	0,9126	-0,0181	0,5486
Caso b	1,00	0,8920	0,0067	0,5404
Caso c	1,05	0,4095	0,7277	0,3483

Em seguida, com o intuito de obter melhor distribuição de geração de potência reativa entre as áreas, a qual permitisse um incremento adicional no carregamento do sistema, buscou-se alterar simultaneamente as tensões das barras piloto das três áreas, referido neste texto como *caso d*. As modificações deste caso em relação ao *caso a* estão apresentadas na tabela 5.12, onde V_{pi}^0 denota as tensões originais na barra piloto de cada área e V_{pi}^f as tensões que geraram o *caso d*. A tabela 5.13 apresenta as gerações percentuais de potência reativa por área, o que possibilitou uma redução de 2.97% das perdas de potência reativa. Além disso, obteve-se melhor distribuição de geração, isto é, de acordo com a capacidade percentual de cada área. No entanto, estas condições não foram suficientes para suportar um acréscimo de carga superior aos 10% inicialmente especificado.

Observou-se que o aumento de carga condicionado ao ajuste da magnitude de tensão nas barras piloto influencia diretamente a forma com que a geração de potência reativa se distribui entre as áreas, o que resulta em melhores condições de operação. Porém, não é possível afirmar que isto possibilita novos acréscimos de carga, e que estes apresentem uma solução das equações da rede elétrica com respeito ao problema de FPO com CST.

Para o sistema de 959 barras, encontrou-se uma situação parecida. Embora o perfil de tensão e a distribuição de geração de potência

Tabela 5.12 – Modificação das tensões nas barras PQV para o *caso d* - 39 barras

Área	V_{pi}^0	V_{pi}^f
Área 1	0,988	0,988
Área 2	0,998	1,02
Área 3	1,004	1,02

Tabela 5.13 – Porcentagem de potência ativa gerada em cada área - 39 barras

Caso	Área 1	Área 2	Área 3
Caso d	0,6724	0,2169	0,6534

reativa não tenham revelado nenhuma tendência de atingir os limites (ver tabela 5.14), o máximo carregamento em que é possível encontrar uma solução que satisfaz as condições CST ocorre com um acréscimo de carga de 3.5%. Nota-se que a imposição da função objetivo de mínimo desvio de tensão e das equações de alinhamento impõem condições bastante severas para a convergência do processo iterativo.

Tabela 5.14 – Resumo dos resultados do sistema de 959 barras

Grandeza	Valor
$V_{min}(p.u.)$	0,9281
$V_{max}(p.u.)$	1,0520
$Qg_{min}(\%)$	3,52
$Qg_{max}(\%)$	37,21

5.4.3 Resultados de máximo carregamento

Para determinar o carregamento máximo que a rede elétrica suporta, sujeito às restrições operacionais e de CST, utilizou-se a formulação apresentada na seção 4.5.2, com a busca da solução através do método PDPI. Os resultados obtidos para os sistemas de 39 e 959 barras, através do FPO convencional e do FPO com CST, são resumidos na Tabela 5.15. Nesta tabela, ρ denota a percentagem de au-

mento de carga máximo, $Min(V)(p.u.)$ e $Max(V)(p.u.)$ representam os valores mínimo e máximo da magnitude da tensão na solução ótima, $Perdas(MW)$ é o valor das perdas de potência ativa nas linhas de transmissão e $Pg_{folga}(MW)$ é a geração de potência ativa na barra de folga. Os limites de magnitude da tensão adotados neste teste foram: a) limite mínimo: 0,90 pu nos dois casos, e b) limites máximos: 1,05 pu (sistema de 39 barras) e 1,10 pu (sistema de 959 barras).

Tabela 5.15 – Máximo carregamento para os sist. de 39 e 959 barras

Sistema de 39 barras					
FPO	ρ	$Min(V)(p.u.)$	$Max(V)(p.u.)$	$Perdas(MW)$	$Pg_{folga}(MW)$
Conv.	26,59	0,987	1,05	46,42	523,92
C/ CST	17,16	0,9713	1,05	68,57	523,92
Sistema de 959 barras					
FPO	ρ	$Min(V)(p.u.)$	$Max(V)(p.u.)$	$Perdas(MW)$	$Pg_{folga}(MW)$
Conv.	26,09	0,9204	1,0743	338,46	189,64
C/ CST	14,69	0,9255	1,0746	475,28	253,20

Observa-se na coluna 2 desta tabela que em ambos os testes a margem de carregamento crítico é reduzida quando se impõem as restrições de alinhamento na geração de potência reativa. Isto é devido ao fato de que a inclusão dessas restrições agregam dificuldades adicionais para a convergência do processo iterativo. Do ponto de vista de operação, no CST há uma interdependência entre os geradores de regulação, tal que todos devem manter uma margem de geração de potência reativa igual à da sua respectiva área. No caso do FPO convencional, não há este compromisso, tal que individualmente os geradores têm mais alternativas quanto à geração de potência reativa, o que consequentemente permite obter um nível de carregamento superior.

Nesses testes, nenhuma magnitude de tensão atingiu o limite mínimo, conforme pode ser visto na coluna 3. Para o sistema de 39 barras, observa-se que as soluções obtidas através de ambos os métodos (FPO convencional e FPO com CST) possuem barras com a magnitude da tensão no limite máximo (coluna 4), o que não ocorre para o sistema de 959 barras. O estabelecimento de uma margem de potência reativa para cada gerador (e por área individual) de acordo com o CST não necessariamente implica uma melhor solução das equações da rede elétrica sob o ponto de vista do perfil de tensão das barras. Isto pode ser notado pelo valor das perdas no sistema de transmissão que, segundo

os valores mostrados na coluna 5 da tabela 5.15, indica perdas maiores na presença de CST.

As Tabelas 5.16 e 5.17 apresentam aspectos da geração de potência reativa na solução dos problemas de FPO convencional e FPO com CST utilizando o sistema teste de 39 barras, sob condição de máximo carregamento. A Tabela 5.16 apresenta os níveis percentuais de potência reativa gerada ($NQ_g(\%)$) em cada área do sistema. A Tabela 5.17 apresenta ($NQ_g(\%)$) e a potência reativa gerada Q_g em MVA_r para cada barra de regulação.

Tabela 5.16 – Geração de potência reativa por área sob máximo carregamento - Sistema de 39 barras

Método	$NQ_g(\%)$	$NQ_g(\%)$	$NQ_g(\%)$
FPO	Área 1	Área 2	Área 3
Conv.	33,52	23,18	27,27
C/ CST	86,91	32,17	100

Tabela 5.17 – Geração de potência reativa por barra sob máximo carregamento - Sistema de 39 barras

Método	Área 1		Área 2		Área 3	
FPO	$NQ_g(\%)$	$NQ_g(\%)$	$NQ_g(\%)$	$NQ_g(\%)$	$NQ_g(\%)$	$NQ_g(\%)$
	Barra 32	Barra 39	Barra 30	Barra 37	Barra 33	Barra 35
Conv.	80,65	-13,60	14,74	36,69	17,30	35,58
C/ CST	86,84	86,98	32,17	32,17	100	100
FPO	Q_g	Q_g	Q_g	Q_g	Q_g	Q_g
	Barra 32	Barra 39	Barra 30	Barra 37	Barra 33	Barra 35
Conv.	241,95	-40,80	58,97	91,72	43,26	106,74
C/ CST	260,52	260,94	128,68	80,42	250,00	300,00

Observa-se na Tabela 5.16 novamente a severidade das restrições de alinhamento no problema que inclui CST, dado que a solução obtida obriga as unidades reguladoras da Área 3 a gerarem potência reativa em seu limite máximo. Isto deixa esta área sem Controle Secundário de Tensão. Nota-se também que para este sistema teste, sob máximo

carregamento, $NQ_g(\%)$ por área foi menor para o problema sem CST. No entanto, nota-se pela Tabela 5.17 que o método com CST impõe a mesma reserva de potência reativa em cada unidade reguladora de uma mesma área, enquanto que o método convencional permite que unidades de uma mesma área consumam enquanto outras unidades geram. Isto acontece, por exemplo, na Área 1. Enquanto no problema com CST ambas as unidades reguladoras das barras 32 e 39 geram $260MVAr$ (correspondentes a 86% de sua capacidade), no problema convencional a unidade da barra 32 gera $241,95MVAr$ (80,65% de sua capacidade) e a unidade da barra 39 consome $40,80MVAr$.

Portanto, baseado nos dados das Tabelas 5.15, 5.16 e 5.17 observa-se que o CST tende a apresentar pior desempenho na busca de soluções que o FPO convencional sob condições de carregamento pesado. É natural que seja mais difícil encontrar solução para o problema com condições adicionais impostas (FPO com CST). No entanto, é importante considerar que a garantia de uma margem de potência reativa mais uniformemente distribuída resulta em melhores condições operacionais para suportar contingências, [4] [14] [15] [27]. Além disso, é esperado que após uma contingência, o objetivo do operador seja simplesmente manter as condições operacionais do sistema, e não impor novas restrições de alinhamento.

5.5 Conclusões

Este capítulo apresentou diversos resultados numéricos do ponto de vista de controle QV na operação de SEP em regime permanente. Inicialmente, testou-se o método de Fluxo de Potência Estendido apresentado na seção 4.3, utilizando o desvio de potência reativa como índice para obter a solução particular do método proposto. Em seguida, testou-se a inclusão de CST no problema de FPE, utilizando-se métodos tensoriais para determinar a solução particular (ao invés da minimização do desvio de potência reativa). Foi escolhida esta opção pois as equações de alinhamento tornavam funções objetivo relacionadas à distribuição de potência reativa pouco efetivas. Abordaram-se as modelagens de FPO com CST apresentadas nas seções 4.5.1 e 4.5.2, considerando as equações de fluxo de potência e as equações de alinhamento como restrições de igualdade, e os limites operativos de tensão e potência reativa como restrições de desigualdade.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou análises em regime permanente do controle de potência reativa-tensão em SEP. O capítulo inicial apresentou uma introdução ao assunto e ao controle hierárquico de tensão.

O segundo capítulo apresentou a base teórica sobre controle QV. Primeiramente foi exposta uma análise matemática do acoplamento entre a potência reativa e a tensão do ponto de vista de sistemas de transmissão. Em seguida, foram apresentados os dispositivos utilizados no controle, as estratégias e os métodos de análise estática.

O terceiro capítulo abordou especificamente o CST, parte do controle hierárquico responsável por lidar com as variações significativas de carga e de tempo de resposta lento. Foi apresentada uma revisão bibliográfica sobre o assunto, abordando os aspectos principais desde que a estratégia foi proposta na década de 70 na Europa até as aplicações atuais, incluindo estudos preliminares no Brasil. Apresentaram-se os conceitos básicos para análise em regime permanente com equações da rede, o que inclui nova classificação de barras e a inclusão das equações de alinhamento.

No quarto e quinto capítulos foram apresentadas modelagens matemáticas e resultados numéricos da solução de problemas de fluxo de potência e fluxo de potência ótimo visando o controle QV. Entre as modelagens analíticas de fluxo de potência, foi apresentado o problema de FPE, onde variáveis foram adicionadas ao problema convencional resultando em um sistema de equações subdeterminado a ser resolvido. Esta abordagem permite obter uma solução geral em termos de duas outras soluções, uma determinada de acordo com a mínima norma Euclidiana e outra determinada através da matriz de espaço nulo do sistema linear. Esta solução de espaço nulo pode ser obtida otimizando parâmetros pré-determinados, tal que neste trabalho foi escolhido minimizar o desvio da geração de potência reativa de um ponto especificado. Em seguida, considerou-se a inclusão do CST no problema de FPE, desta vez utilizando o termo de segunda ordem do método (termo tensorial) para obter a solução de espaço nulo.

Entre as abordagens de FPO, analisaram-se as soluções de CST considerando restrições de tensão e de geração de potência reativa, com o objetivo de minimizar os desvios de magnitude de tensão das barras de carga de um ponto pré-especificado. Em seguida, propôs-se determinar o ponto de máximo carregamento operativo da rede considerando CST.

6.1 Fluxo de Potência Estendido

Observou-se que a modelagem matemática utilizada garantiu uma melhor distribuição de potência reativa em relação à solução do problema de fluxo de potência convencional. A solução de espaço nulo, obtida através de um problema de otimização, foi determinante neste resultado. Além disso, a aplicação do método de solução no problema de FPE apresentou pouca diferença em relação ao método de fluxo de potência convencional do ponto de vista de desempenho do processo iterativo, considerando o número de iterações e o tempo de processamento.

6.2 Fluxo de Potência Estendido com Controle Secundário de Tensão

Durante o processo iterativo, notou-se que as restrições de alinhamento foram as figuras de mérito que mais tiveram dificuldade de satisfazer a tolerância. No entanto, isto não gerou um número significativo de iterações extras. Além disso, as restrições de alinhamento foram importantes para garantir uma reserva de potência reativa melhor distribuída que nos métodos sem CST.

Observou-se também a influência da escolha das barras piloto e barras de regulação do sistema, e a sensibilidade da magnitude de tensão especificada nas mesmas. Estas especificações são determinantes para a convergência do método iterativo.

Como desvantagem da abordagem de Fluxo de Potência com CST, a não imposição de restrições limitantes nos métodos de fluxo de potência permitiu que as tensões nas barras de regulação fossem muito elevadas em soluções de carregamento pesado. Outro problema identificado foi a conversão das barras de regulação que atingem o limite de potência reativa. Do ponto de vista de operação, as barras piloto da área cujas barras tiveram o limite alcançado ficam sem controle.

6.3 Fluxo de Potência Ótimo com Controle Secundário de Tensão

Impondo-se os limites de tensão sob as barras, notou-se que uma influência ainda maior das restrições de alinhamento no desempenho dos métodos com CST. Estas equações restringem muito as possibi-

lidades de solução dos problemas, tal que a otimização da função objetivo fica prejudicada em relação aos métodos sem CST. Além disso, quando restrições de potência reativa foram atingidas, observou-se que as áreas tenderam a ficar sem controle. Estratégias de conversão de barras mostram sua importância neste ponto.

Aumentando-se gradativamente o índice de carregamento do sistema, observou-se que os métodos encontram soluções melhores do ponto de vista de distribuição de potência reativa quando a tensão especificada nas barras piloto é ajustada de acordo com a variação de carga. Porém, estes ajustes não implicam diretamente em atingir índices maiores de carregamento.

Comparando-se critérios como perdas de potência ativa ou perfil de tensão nas barras, notou-se que as soluções considerando o CST apresentam pior desempenho que as soluções sem o uso de CST. Além disso, notou-se que o CST não garante menor margem de geração de potência reativa em relação a métodos sem CST. No entanto, o CST impede que esta margem esteja mal distribuída, isto é, impede que haja geradores consumindo e outros gerando potência reativa na mesma área. Do ponto de vista de operação, espera-se que esta condição permita melhor desempenho do sistema na ocorrência de contingências.

6.4 Sugestões para trabalhos futuros

Considerando as dificuldades encontradas neste trabalho, sugere-se:

- Análises de contingências considerando CST. Observar parâmetros como: convergência, nível de tensão, modificação das reservas de potência reativa e carregamento operacional do sistema em comparação com a modelagem de fluxo de potência convencional.
- Teste de estratégias alternativas de conversão de barras para as barras piloto e de regulação. Os procedimentos adotados neste trabalho serviram para demonstrar a importância e a necessidade dessa conversão, mas não foram efetivos em casos em que houve aumento de carregamento. Na literatura, não há consenso de que a conversão de barras é o melhor procedimento no caso de limites atingidos.
- Inclusão de transformadores de tap variável na modelagem analítica do problema com CST. Estes equipamentos são dispositivos

de controle QV que possivelmente podem contribuir na determinação de soluções com melhor distribuição de potência reativa e soluções que permitam maior carregamento da rede.

- Desenvolvimento de uma estratégia de controle de tensão para as barras piloto. Neste trabalho utilizou-se um valor fixo para a magnitude de tensão das barras piloto, e variando-se estes valores considerando aumento de carregamento na rede, observou-se grande influência na obtenção de soluções para o problema de fluxo de potência. Desta forma, sugere-se um estudo maior dos valores a serem fixados para cada patamar de carga, ou ainda incluir uma expressão matemática que permita controlar a tensão destas barras em situações de máximo carregamento.
- Observação do desempenho de parâmetros relacionados à potência ativa, como perdas de potência e custos de geração, dada a dependência crescente e dificuldade de separar problemas QV de problemas $P\delta$.
- Análise do fluxo de potência entre áreas, comparando-se o desempenho do CST com as modelagens analíticas convencionais. Mantendo-se uma melhor distribuição de potência reativa dentro de cada área, espera-se que com CST os fluxos de potência reativa entre áreas sejam menores do que quando se utiliza as modelagens convencionais. O fluxo de potência ativa também pode ser avaliado considerando limites de transmissão.

REFERÊNCIAS

- [1] LIN, M.; RAYUDU, R. K.; SAMARASINGHE, S. A review of voltage-var control. In: *Proc. of the Australian Universities Power Engineering Conference (AUPEC)*. Christchurch - New Zealand: [s.n.], 2003. p. 1–6.
- [2] POPOVIC, D. S.; LEVI, V. A. Extension of the load flow model with remote voltage control. *Electric Power System Research*, v. 25, p. 207–212, 1992.
- [3] BERIZZI, A. et al. Singular value decomposition for an ORPF formulation in presence of SVR. In: *Proc. of the IEEE Electrotechnical Conference*. Mediterranean - Málaga: [s.n.], 2006. p. 1–6.
- [4] POPOVIC, D. S.; CALOVIC, M. S.; LEVI, V. A. Voltage reactive security analysis in power systems with automatic secondary voltage control. *Proceedings of the IET Generation, Transmission and Distribution*, v. 141, n. 3, p. 177–183, 1994.
- [5] CONEJO, A.; AGUILAR, M. Secondary voltage control: nonlinear selection of pilot buses, design of an optimal control law, and simulation results. *Proceedings of the IET Generation, Transmission and Distribution*, v. 145, n. 1, p. 77–81, January 1998.
- [6] BERIZZI, A. et al. *Optimisation advances in electric power systems*. [S.l.]: Nova Science Publishers, 2008. 183–226 p.
- [7] REBOURS, Y. *A Comprehensive Assessment of Markets for Frequency and Voltage Control Ancillary Services*. Tese (Doutorado) — University of Manchester, 2008.
- [8] BASTARD, P. *Fonctionnement et réglage des systèmes de transport et de distribution d'énergie électrique*. 1998.
- [9] GRAINGER, J. J.; STEVENSON, W. D. *Power system analysis*. [S.l.]: TMcGraw-Hill, 1994.
- [10] BASTARD, P. *Fonctionnement et réglage des systèmes de transport et de distribution d'énergie électrique*. [S.l.]: Supélec, 1998.
- [11] FARDANESH, B. Future trends in power system control. *IEEE Computer Applications in Power Systems*, p. 24–31, July 2002.

- [12] FELIACHI, A. On the decentralized control of large-scale systems. In: *Proc. IEEE Conf. Systems, Man, and Cybernetics*. [S.l.: s.n.], 1989. v. 3.
- [13] ILIC, M.; LIU, S. Hierarchical power systems control: Its value in a changing industry. In: *New York: Springer-Verlag*. [S.l.: s.n.], 1996.
- [14] POPOVIC, D. S. Impact of secondary voltage control on voltage stability. *Electric Power System Research*, v. 40, p. 51–62, 1997.
- [15] CORSI, S. *Voltage control and protection in electrical power systems*. [S.l.]: Springer, 2015.
- [16] CHANG, S. K.; BRANDWAJN, V. Adjusted solutions in fast decoupled load flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, p. 726–733, 1988.
- [17] CHANG, S. K.; BRANDWAJN, V. Solving the adjustment interactions in fast decoupled load flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, p. 801–805, 1991.
- [18] NANBA, M. et al. Studies on VIPI based control methods for improving voltage stability. In: *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*. [S.l.: s.n.], 1998. v. 20, p. 141–146.
- [19] LE, T.; NEGNEVITSKY, M. Expert system application for voltage and var control in power transmission and distribution systems. In: *Transmission and Distribution Conference*. [S.l.: s.n.], 1996. p. 531–536.
- [20] STARRET, S.; FOUAD, A. Nonlinear measures of modal controllability. *Electrical Power Systems Research*, v. 52, n. 1, p. 65–75, August 1999.
- [21] PAVÃO, R. K. *Avaliação de uma estratégia de Controle Secundário de Tensão utilizando seleção de barras piloto e áreas de controle através de lógica Fuzzy*. Dissertação (Mestrado) — Pontífica Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2006.
- [22] MOUSAVI, O. A.; CHERKAOUI, R. *Literature Survey on Fundamental Issues of Voltage and Reactive Power Control*. 2011.
- [23] KWATNY, H. G. Stability enhancement via secondary voltage regulation. In: *Bulk Power Systems Voltage Phenomena II - Voltage Stability and Security*. USA: [s.n.], 1991. p. 147–156.

- [24] CAÑIZARES, C. et al. Comparing secondary voltage regulation and shunt compensation for improving voltage stability and transfer capability in the italian power system. *Electric Power System Research*, v. 40, p. 67–76, 2005.
- [25] BERIZZI, A. et al. First and second order methods for voltage collapse assessment and security enhancement. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n. 2, p. 543–551, May 1998.
- [26] ILEA, V. et al. Reactive power flow optimisation in the presence of secondary voltage control. In: *Proc. of the IEEE PowerTech Conference*. Bucharest - Romania: [s.n.], 2009. p. 1–6.
- [27] SUNG, Y. *Design of Secondary Voltage and Stability Controls with Multiple Control Objectives*. Tese (Doutorado) — Georgia Institute of Technology, 2008.
- [28] REHTANZ, C. *Autonomous Systems and Intelligent Agents in Power System Control and Operation*. [S.l.]: Springer, 2003.
- [29] TARANTO, G. N. et al. Benefits of applying secondary voltage control schemes to the Brazilian system. In: *Power Engineering Society Summer Meeting*. Seattle: [s.n.], 2000. p. 937–942.
- [30] ILEA, V. et al. Reactive power flow optimisation in power systems with hierarchical voltage control. In: *Proc. of the IEEE Power System Computation Conference*. Stockholm - Sweden: [s.n.], 2011. p. 1–6.
- [31] HANSON, R. J.; LAWSON, C. L. *Solving least squares problems*. [S.l.]: SIAM, 1995.
- [32] COSTA, A. J. S.; JR., S. I. S.; SALGADO, R. S. Equality constraints in power system state estimation via orthogonal row-processing techniques. In: *Proceedings of the IFAC Symposium on Planning and Operation of Electric Energy Systems*. [S.l.: s.n.], 1985. p. 43–49.
- [33] HANSON, R. J.; LAWSON, C. L. *Extensions and applications of the Householder algorithm for solving linear least squares problems*. [S.l.]: Math. Comput., 1969.
- [34] SALGADO, R. S.; ZEITUNE, A. F. Power flow solutions through tensor methods. *Proceedings of the IET Generation, Transmission and Distribution*, v. 3, n. 5, p. 413–424, 2009.

- [35] WASHINGTON, U. of. *Power Systems Test Case Archive*. 2007. WEB. Disponível em: <www.ee.washington.edu>.
- [36] SALGADO, R. S.; BERIZZI, A. A new second-order method for branch contingency analysis and static voltage security. *Electric Power Systems Research*, n. 123, p. 137–146, 2015.
- [37] ZIENA OPTIMIZATION, LLC. *KNITRO Documentation*. [S.l.], Nov. 2011.
- [38] TAKAHASHI, Y.; RABINS, M. J. *Control and Dynamic Systems*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1972.
- [39] STRANG, G. *Linear Algebra and its Applications*. [S.l.]: Harcourt College Publications, 1988.

APÊNDICE A – Método Primal-Dual de Pontos Interiores

A.1 SOLUÇÃO DO FPO VIA MÉTODO DE PONTOS INTERIORES

Considere o problema de otimização restrita na forma compacta mostrada a seguir.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeito a } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ &\quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{h}^{lim} \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde \mathbf{x} é o vetor das variáveis primais de otimização, e as equações vetoriais representam as restrições de igualdade e de desigualdade.

A.1.1 Solução via método primal-dual

A metodologia de solução do problema expresso pela Eq. (A.1) via método de Pontos Interiores pode ser sumarizada nos passos descritos a seguir.

- transformação das restrições de desigualdade em restrições de igualdade através do uso de variáveis de folga; isto fornece

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} - \mathbf{h}^{lim} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{s} &> \mathbf{0} \end{aligned} \tag{A.2}$$

onde, \mathbf{s} é um vetor cujos componentes (s_i são as variáveis de folga correspondentes às restrições de desigualdade);

- inclusão da função barreira logarítmica na função objetivo, isto é,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mu \sum_i \ln s_i$$

- aplicação das condições de otimalidade no problema resultante, o qual é expresso como,

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mu \sum_i \ln s_i \\ &\text{sujeito a } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ &\quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} - \mathbf{h}^{lim} = \mathbf{0} \\ &\quad \mathbf{s} > \mathbf{0} \end{aligned} \tag{A.3}$$

A função Lagrangeana do problema expresso na Eq. (A.3) é

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) - \mu \sum_i \ln s_i + \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^t (\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} - \mathbf{h}^{lim}) \quad (\text{A.4})$$

onde todos os termos foram definidos anteriormente

A aplicação das condições de Karush-Kuhn-Tucker à Eq. (A.4) fornece

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{0} = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\pi} \\ \nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{0} = -\boldsymbol{\mu} \mathbf{e} + \mathbf{S} \boldsymbol{\pi} \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{0} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} - \mathbf{h}^{lim} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde, $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ e $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})$ representam a primeira derivada de $f(\mathbf{x})$ e $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, respectivamente; $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x})$ é a matriz Jacobiana de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$; \mathbf{e} é um vetor unitário de dimensão adequada; e \mathbf{S} é uma matriz diagonal formada pelos elementos do vetor \mathbf{s} .

As condições expressas pela Eq. (A.5) são acrescidas das restrições de não negatividade, correspondentes às variáveis de folga, e de sinal, relativas aos multiplicadores duais; isto é,

$$\mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0} \quad (\text{A.6})$$

O ponto estacionário do problema representado pela Eq. (A.3) é obtido resolvendo-se a Eq. (A.5). Utilizando-se o método de Newton-Raphson, o seguinte sistema de equações lineares deve ser resolvido a cada iteração:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \Delta \boldsymbol{\lambda} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t \Delta \boldsymbol{\pi} &= -\mathbf{t} \\ \boldsymbol{\Pi} \Delta \mathbf{s} + \mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\pi} &= -(-\boldsymbol{\mu} \mathbf{e} + \mathbf{S} \boldsymbol{\pi}) \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} &= -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - \Delta \mathbf{s} &= -(\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} - \mathbf{h}^{lim}) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde,

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) = \nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x}) - \sum_i \lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x}) - \sum_j (\pi_l + \pi_u) \nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x})$$

é a matriz de segundas derivadas da função Lagrangeana em relação às variáveis de otimização; $\nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x})$, $\nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x})$, e $\nabla_{\mathbf{x}}^2 h_i(\mathbf{x})$ são as matrizes

de segundas derivadas de $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$ e $h_i(\mathbf{x})$, respectivamente;

$$\mathbf{t} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\pi}$$

e $\boldsymbol{\Pi}$ é uma matriz diagonal formada pelos elementos dos vetor $\boldsymbol{\pi}$.

A Eq. (A.7) pode ser re-escrita na forma matricial, resultando em

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{s} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\pi} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ (-\mu \mathbf{e} + \mathbf{S} \boldsymbol{\pi}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} - \mathbf{h}^{lim} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

com a matriz $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi})$ dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) & \mathbf{0} & \mathbf{J}(\mathbf{x})^t & \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Pi} & \mathbf{0} & \mathbf{S} \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade. Note que esta matriz, originalmente não simétrica, pode se tornar simétrica multiplicando-se a segunda linha por \mathbf{S} .

A solução da Eq. (A.8) fornece os incrementos nas variáveis primais e duais do problema de otimização. A não violação das restrições de não-negatividade das variáveis de folga e de sinais dos multiplicadores duais é assegurada, calculando-se o comprimento do passo nos espaços primal e dual como,

$$\begin{aligned} \gamma_p &= \min \left[\min_{\Delta s_i < 0} \frac{s_i}{|\Delta s_i|}, \quad 1, 0 \right] \\ \gamma_d &= \min \left[\min_{\Delta \pi_j > 0} \frac{\pi_j}{|\Delta \pi_j|}, \quad 1, 0 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A atualização das variáveis primais e duais é dada por,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \sigma \gamma_p \Delta \mathbf{x}^k & \boldsymbol{\lambda}^{k+1} &= \boldsymbol{\lambda}^k + \sigma \gamma_d \Delta \boldsymbol{\lambda}^k \\ \mathbf{s}^{k+1} &= \mathbf{s}^k + \sigma \gamma_p \Delta \mathbf{s}^k & \boldsymbol{\pi}^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}^k + \sigma \gamma_d \Delta \boldsymbol{\pi}^k \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

onde, σ é uma constante cuja finalidade é garantir que as variáveis \mathbf{s} e $\boldsymbol{\pi}$ não se anulem, recomendando-se para a mesma o valor de **0,9995**, [9].

Portanto, a finalidade dos fatores de passo $\sigma\gamma_p$ e $\sigma\gamma_d$ é garantir a não negatividade das variáveis de folga e assegurar uma redução suficiente na função de mérito representada pela função Lagrangeana.

O valor do parâmetro barreira é computado ao final de cada iteração utilizando-se a equação

$$\mu = \frac{s^t \pi}{2l\beta} \quad (\text{A.12})$$

onde l é o número restrições de desigualdade.

O algoritmo para a resolução de um problema de otimização via método de Pontos Interiores versão Primal-Dual é sumarizado nos passos descritos a seguir.

1. Inicialização das variáveis primais e duais;
2. Cálculo do vetor gradiente da função Lagrangeana aumentada (Eq. (A.5));
3. Teste de convergência: comparação da norma euclidiana do vetor gradiente e do valor do parâmetro barreira μ com as respectivas tolerâncias. Se o critério de convergência for satisfeito, o processo iterativo é encerrado;
4. Cálculo da matriz \mathbf{W} e solução do sistema linear (Eq. (A.8));
5. Determinação dos comprimentos dos passos nos espaços primal e dual (equações (A.10));
6. Atualização das variáveis de otimização (Eq. (A.11));
7. Cálculo do novo valor do parâmetro barreira μ (Eq. (A.12)). Retorno ao passo (2).

A.1.2 Redução do sistema linear

Eq. (A.8) pode ser significativamente reduzido, de maneira a tornar sua dimensão independente do número de restrições de desigualdade [9]. Para isto, definam-se os seguintes vetores

$$\begin{aligned} \nu_l &= -\mu \mathbf{e} + \mathbf{S}\pi \\ \mathbf{y}_l &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^{lim} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

tal que, as equações (A.7) podem ser re-escritas na forma

$$\begin{aligned}\Pi\Delta\mathbf{s} + \mathbf{S}\Delta\boldsymbol{\pi} &= -\boldsymbol{\nu}_l \\ \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{s} &= -\mathbf{y}_l\end{aligned}\tag{A.14}$$

A última equação pode ser expressa como

$$\Delta\mathbf{s} = -\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} - \mathbf{y}_l\tag{A.15}$$

A substituição da Eq. (A.15) na primeira Eq. (A.14) resulta em

$$\Delta\boldsymbol{\pi} = \mathbf{S}^{-1}(-\boldsymbol{\nu}_l + \Pi\mathbf{y}_l) + \mathbf{S}^{-1}\Pi\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}\tag{A.16}$$

Substituindo as equações (A.16) na primeira das equações (A.7) obtém-se

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{H}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\pi}) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})^t\mathbf{S}_l^{-1}\Pi\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\right)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{J}(\mathbf{x})^t\Delta\boldsymbol{\lambda} = \\ -\mathbf{t} - \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})^t\mathbf{S}^{-1}(-\boldsymbol{\nu}_l + \Pi\mathbf{y}_l)\end{aligned}\tag{A.17}$$

Definindo-se

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},\mathbf{s},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{H}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\pi}) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})^t\mathbf{S}_l^{-1}\Pi\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\mathbf{t}} &= -\mathbf{t} - \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})^t\mathbf{S}^{-1}(-\boldsymbol{\nu}_l + \Pi\mathbf{y}_l)\end{aligned}$$

a Eq. (A.17) transforma-se em

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},\mathbf{s},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\pi})\Delta\mathbf{x} + \mathbf{J}(\mathbf{x})^t\Delta\boldsymbol{\lambda} = \tilde{\mathbf{t}}\tag{A.18}$$

a qual, juntamente com a terceira Eq. (A.7), forma o sistema linear reduzido

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},\mathbf{s},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\pi}) & \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{t}} \\ -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}\tag{A.19}$$

A dimensão do sistema linear reduzido da Eq. (A.19) é independente do número de restrições de desigualdade, sendo igual a soma dos números de variáveis de otimização e de restrições de igualdade.

APÊNDICE B – Programação Quadrática via KNITRO

O problema geral de programação quadrática a ser resolvido pelo KNITRO é definido como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} \quad 1/2 \mathbf{x}' \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{g}' \mathbf{x} \\
 & \text{sujeito a} \quad \mathbf{A}_{eq} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq} \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{c}_{eq}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Onde:

\mathbf{H} é a Hessiana da função Lagrangena em relação as variáveis \mathbf{x} do problema;

\mathbf{g} é o gradiente da função objetivo (linear, quadrática ou não linear) em relação a \mathbf{x} ;

\mathbf{A}_{eq} e \mathbf{b}_{eq} são os parâmetros das restrições de igualdade lineares;

$\mathbf{c}_{eq}(\mathbf{x})$ são restrições de igualdade não lineares;

\mathbf{A} e \mathbf{b} são os parâmetros das restrições de desigualdade lineares;

$\mathbf{c}(\mathbf{x})$ são restrições de desigualdade não lineares;

\mathbf{lb} e \mathbf{ub} são os limites inferiores e superiores impostos ao vetor de variáveis \mathbf{x}

O seu uso conjunto com o MATLAB é viabilizado através da chamada de uma função, que exporta os parâmetros necessários para a solução do problema e importa os resultados obtidos de volta para o programa. Um exemplo simples para esta função em problemas de programação quadrática com restrições de igualdade e desigualdade é:

$$[\mathbf{x}, \text{exitflag}, \text{lambda}] = \text{knitromatlabqp}(\mathbf{x0}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{Aeq}, \mathbf{beq}, \mathbf{lb}, \mathbf{ub}, \text{options})$$

Nesta interface, 'knitromatlabqp' ativa o KNITRO, 'x0' é a estimativa do ponto inicial e 'options' possibilita escolher o método de solução, a tolerância, o número máximo de iterações e outras customizações. Já as variáveis 'x' e 'lambda' carregam os dados de saída da solução ótima do problema resolvido pelo KNITRO, enquanto que 'exitflag' disponibiliza o relatório da execução do programa. Mais detalhes podem ser encontrados em [37].

***APÊNDICE C - Exemplo de aplicação de mínima norma
Euclideana***

Visando ilustrar geometricamente o significado da solução de mínima norma Euclideana, considere que o sistema linear subdeterminado $\mathbf{A}\Delta\mathbf{y}_0 = \mathbf{b}$ é dado por,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_{01} \\ \Delta y_{02} \\ \Delta y_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Neste caso, as duas equações representam dois hiperplanos em termos de três variáveis. A solução de mínima norma obtida com o auxílio da Eq. (4.13) é $\Delta\mathbf{y}_0^t = [-0.496 \quad 1.128 \quad 0.560]$. A figura C.1 mostra a interpretação geométrica deste sistema linear subdeterminado. Existem infinitas soluções, representadas pela linha reta na interseção dos dois hiperplanos. Há uma única solução de mínima norma, a qual é um ponto na linha reta, como indicado pelo segmento de reta partindo da origem, perpendicular à linha reta que representa o espaço das soluções viáveis. A componente de espaço nulo é ortogonal à solução de mínima norma. Detalhes adicionais sobre este tipo de solução podem ser encontrados em [38, 39].

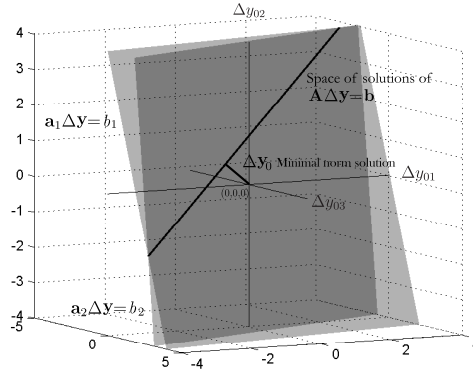


Figura C.1 – Solução de mínima norma Euclideana - interpretação geométrica.